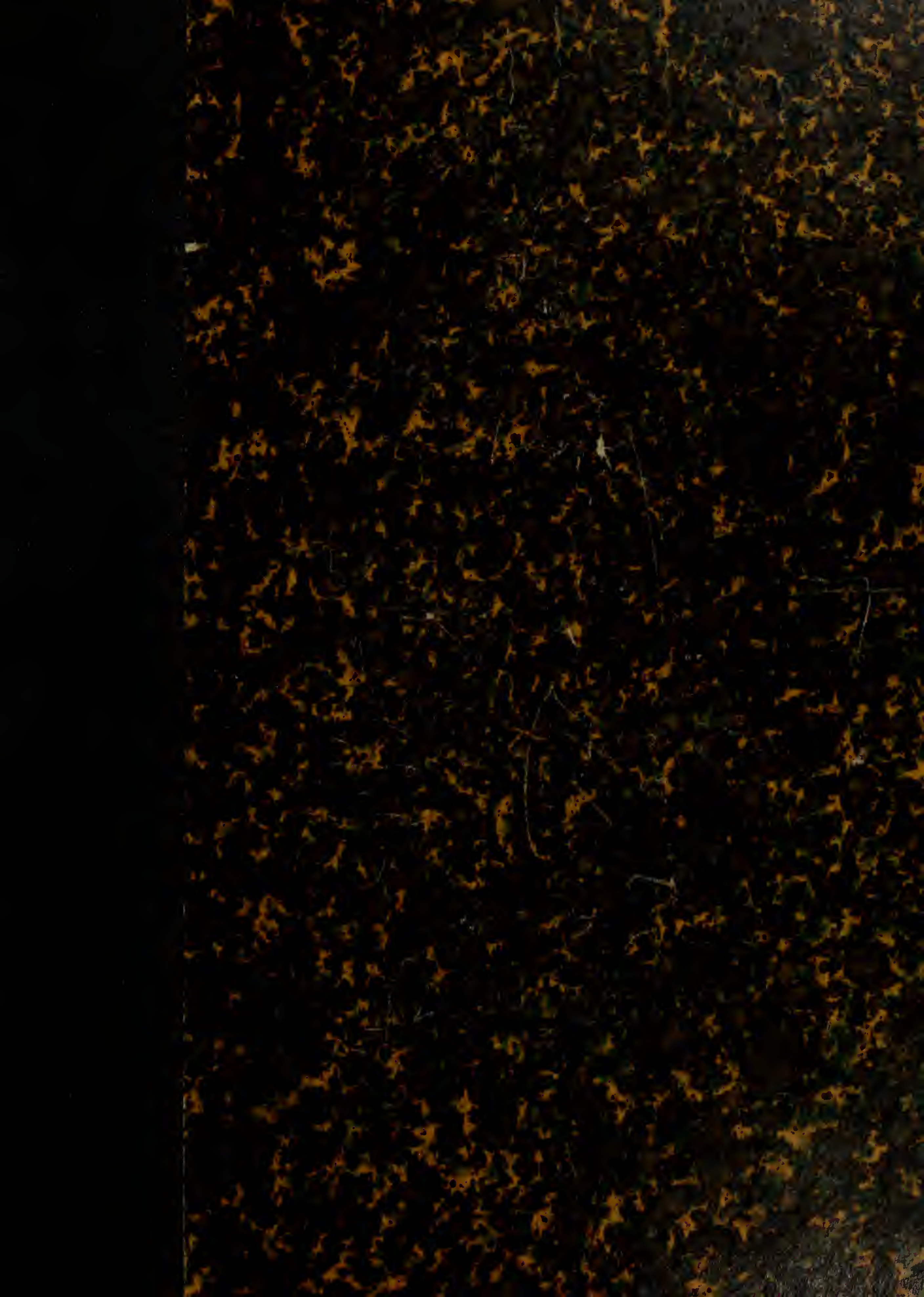
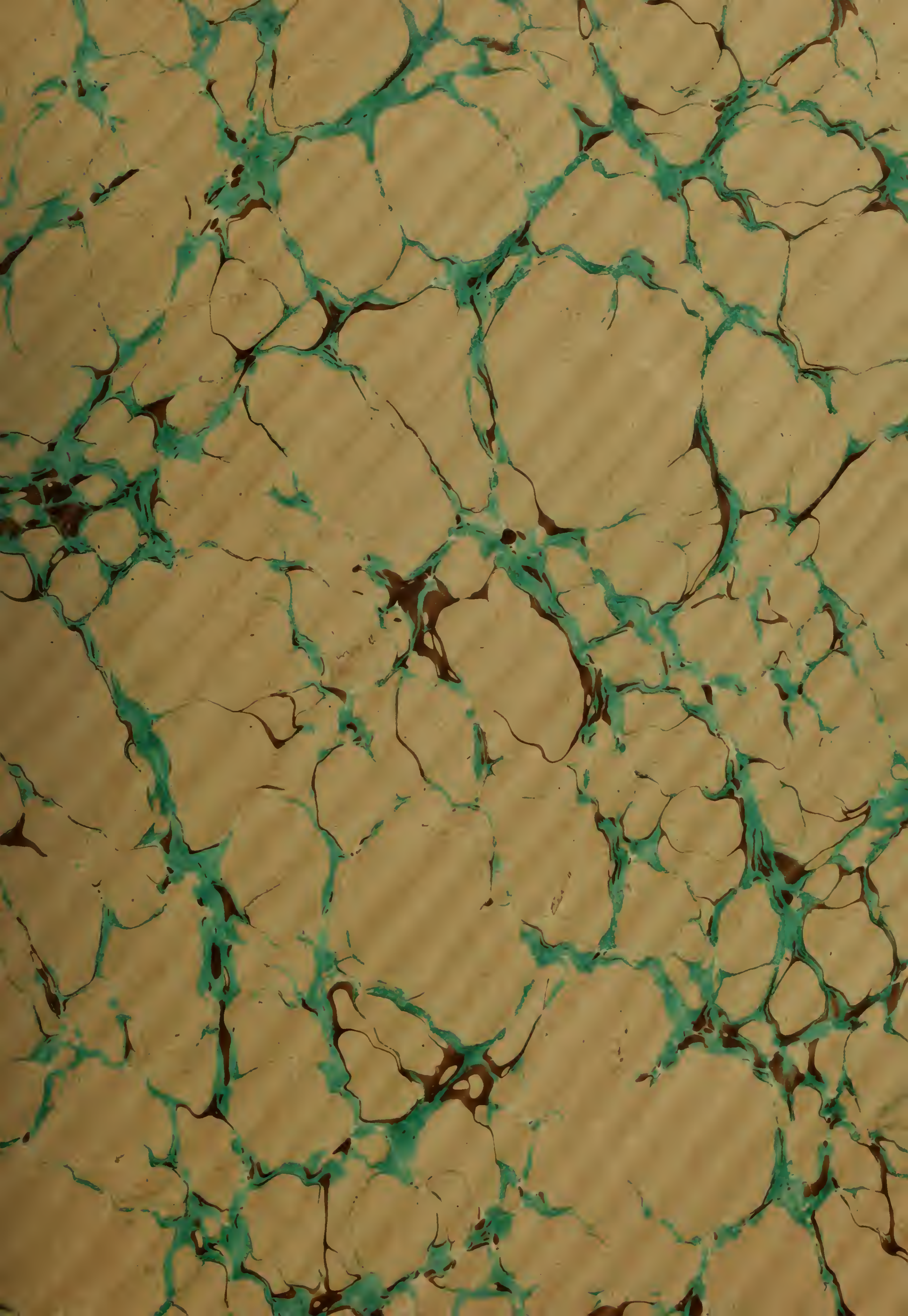






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XII. — ANNÉE 1867.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1867

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XII.

ERRATUM.

Page 101, ligne 4, *au lieu de* $F(2m - 3i)^2$, *lisez* $F(2m - 3i^2)$.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA

PROPAGATION ET LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE DANS LES CRISTAUX;

PAR M. ÉMILE SARRAU,

Sous-Ingénieur des Manufactures de l'État.

PREMIER MÉMOIRE.

La théorie mathématique des phénomènes optiques produits par les cristaux nous paraît reposer sur deux principes fondamentaux :

1° La modification périodique de l'éther dans les milieux cristallisés;

2° La modification spéciale qu'éprouve la constitution de l'éther par suite de la symétrie propre au milieu cristallisé.

C'est à ce double point de vue que nous recherchons dans ce Mémoire quelques propriétés très-générales des équations qui régissent les vibrations de l'éther renfermé dans un cristal, réservant pour un nouveau travail l'analyse des conséquences qui en résultent pour l'étude des phénomènes.

C'est Cauchy qui a indiqué le premier l'influence des perturbations dues à la constitution périodique de l'éther. L'illustre géomètre a créé ainsi un principe nouveau, fécond en conséquences, et vraisembla-

blement destiné à donner la solution des problèmes qui, depuis Fresnel, ont si souvent occupé les géomètres et les physiciens. Il importait cependant de donner aux équations qu'il a obtenues une forme plus explicite et de les compléter par des termes qu'il néglige et qui ont une influence sensible. Nous essayons de le faire dans le premier Chapitre de ce Mémoire.

Le second est consacré à l'étude des modifications qu'éprouvent les équations des mouvements vibratoires par suite de la symétrie cristalline. Nous prenons comme point de départ les belles *Études cristallographiques* de Bravais. Suivant sa théorie, un cristal est caractérisé par le nombre et la disposition des éléments de symétrie communs au polyèdre moléculaire et à l'assemblage. Ces éléments déterminent la forme cristalline et se déduisent, inversement, de la forme cristalline observée.

Appliquant ces principes à la théorie des phénomènes lumineux, nous admettons que tout élément de symétrie commun à la molécule et à l'assemblage est un élément de symétrie des atomes de l'éther. L'expression analytique de ce fait assigne aux équations une forme spéciale, variable non-seulement avec le système cristallin, mais encore avec les divers cas de mériédrie que peut offrir chaque système.

C'est ainsi que s'établissent entre les phénomènes optiques des corps et leur forme cristalline des relations dont les conséquences sont particulièrement importantes, parce que leur vérification expérimentale doit être considérée comme une confirmation, non-seulement de la théorie des ondes, mais encore des conceptions sur lesquelles repose aujourd'hui l'explication des lois cristallographiques.

CHAPITRE I.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES QUI RÉGISSENT LES VIBRATIONS DE L'ÉTHER RENFERMÉ DANS UN MILIEU CRISTALLISÉ INDÉFINI.

1. Suivant la théorie physique généralement admise, les phénomènes lumineux résultent des vibrations d'un milieu particulier appelé *éther*. On suppose que l'éther existe dans tout l'espace et pénètre les

corps matériels dans l'intérieur desquels son état statique dépend à la fois des actions qu'il exerce sur lui-même et de celles qu'exercent sur lui les atomes matériels.

L'éther répandu dans le vide peut être considéré comme homogène. Dans les milieux matériels, sa constitution varie nécessairement d'un point à l'autre de l'espace : dans les milieux cristallisés, cette variation est *périodique*.

2. En effet, suivant les minéralogistes, les centres de gravité des molécules des cristaux forment un assemblage régulier de points situés sur les sommets de cellules parallélipipédiques égales déterminées par trois systèmes de plans équidistants et parallèles à trois plans fixes rectangulaires ou obliques.

Toutes les molécules sont, en outre, identiquement orientées, de sorte que les atomes correspondants occupent des positions homologues dans les diverses cellules. Cette disposition des atomes matériels entraîne évidemment une disposition analogue des atomes de l'éther, de sorte que la constitution de l'éther, variable dans l'intérieur d'une même cellule, est la même aux points correspondants de plusieurs cellules différentes.

L'éther renfermé dans un cristal peut donc être considéré comme un système *périodiquement homogène*.

3. Nous admettons que, dans les phénomènes lumineux, les vibrations de la matière sont insensibles. Dans cette hypothèse, il est aisé de déterminer la forme essentielle des équations qui représentent les vibrations de l'éther. Ces équations sont au nombre de trois et déterminent les projections du déplacement atomique sur trois axes fixes. Elles sont linéaires, aux dérivées partielles, et les coefficients sont des fonctions des coordonnées, variables avec la constitution de l'éther, dans l'intérieur du milieu matériel. Si ce milieu est cristallisé, il suffit de prendre les axes parallèles aux arêtes d'un des systèmes parallélipipédiques déterminés par les centres de gravité des molécules matérielles, pour réduire les coefficients à des fonctions périodiques ayant pour périodes les arêtes d'un parallélipipède élémentaire.

4. L'intégration de ces équations à coefficients périodiques peut

être ramenée, comme Cauchy l'a fait voir, à celle d'un système d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants.

Il suffit de substituer aux coefficients et aux fonctions inconnues leurs développements en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives de trois exponentielles trigonométriques ayant respectivement pour périodes les trois paramètres de l'assemblage moléculaire, et d'égaler, dans le résultat obtenu par cette substitution dans les équations, les coefficients des puissances semblables des exponentielles.

5. En opérant comme on vient de le dire, la différence entre un des trois déplacements composants d'un atome d'éther et sa *valeur moyenne* (c'est-à-dire le terme de son développement indépendant des exponentielles) se compose de termes proportionnels à des exponentielles reprenant périodiquement la même valeur dans des intervalles comparables aux intervalles moléculaires des corps. Or, ces dimensions étant insaisissables, il est naturel de supposer que, dans la théorie de la lumière, les termes dont il s'agit n'ont qu'une influence inappréciable à nos organes et qu'on pourra les négliger en réduisant les déplacements à leurs valeurs moyennes.

6. Le système d'équations à coefficients constants que fournit la méthode qui vient d'être indiquée renferme avec les valeurs moyennes des déplacements les coefficients des exponentielles trigonométriques qui entrent dans leurs développements. En éliminant ces derniers, on obtient trois équations aux dérivées partielles et à coefficients constants auxquelles doivent satisfaire les valeurs moyennes des inconnues.

C'est le système de ces équations, appelées par Cauchy équations *auxiliaires*, qui paraît représenter les phénomènes optiques des milieux cristallisés.

7. Il importe d'observer que les équations auxiliaires sont fort différentes de celles que l'on obtiendrait en réduisant les coefficients périodiques à leurs valeurs moyennes, c'est-à-dire à des constantes. Elles dépendent, en effet, des termes qui, dans le développement des coefficients, sont proportionnels aux puissances des exponentielles. Ce sont précisément ces termes qui, loin d'être négligeables, comme

on le suppose en réalité dans les théories généralement admises, renferment l'explication des phénomènes lumineux produits par les cristaux.

8. L'étude des perturbations dues à la périodicité de l'éther étant fondamentale, il est nécessaire d'exposer d'abord l'analyse qui conduit aux équations auxiliaires. La marche suivie dans ce Chapitre a été indiquée par Cauchy [*].

Analyse.

9. Considérons l'éther renfermé dans l'intérieur d'un corps quelconque. Prenant d'abord le système de ses atomes dans un état d'équilibre, désignons par x, y, z les coordonnées d'un de ces atomes m. Soient h, k, l les accroissements de ces coordonnées quand on passe de l'atome m à un atome voisin m'.

Les composantes de l'action mutuelle des atomes m, m' sont des fonctions de h, k, l devenant insensibles dès que ces variables dépassent de très-petites valeurs.

Supposons en second lieu que l'éther vibre, et désignons par u, v, w les projections du déplacement de l'atome m sur les axes de coordonnées. Les déplacements de m' seront $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$, la caractéristique δ exprimant les accroissements qu'éprouvent les fonctions u, v, w quand les variables x, y, z s'accroissent de h, k, l. Les composantes de la force accélératrice exercée par m' sur m seront des fonctions de $h + \delta u$, $k + \delta v$, $l + \delta w$, projections de la distance mm' sur les axes. Elles pourront donc être réduites à des fonctions linéaires de δu, δv, δw si l'on suppose les différences des déplacements assez petites pour négliger leurs produits. Il suffit d'ajouter les composantes des forces accélératrices exercées par tous les atomes tels que m', pour obtenir la force accélératrice totale exercée sur l'atome m par l'éther qui l'environne.

Les composantes de l'action exercée par la matière sur m sont des fonctions linéaires de u, v, w quand les déplacements sont très-petits.

On obtiendra enfin les équations du mouvement de m en égalant les

---

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXX, p. 17.

composantes de l'action exercée sur ce point par l'éther et la matière aux dérivées secondes de u, v, w prises par rapport au temps.

10. On a ainsi trois équations linéaires aux différences mêlées. Elles deviennent linéaires aux dérivées partielles en développant les δ par la série de Taylor. Les développements sont très-convergents à cause de la petitesse de h, k, l pour tous les points situés dans la sphère d'action de m.

11. On peut donc énoncer cette conclusion :

La forme la plus générale des équations qui régissent les vibrations très-petites de l'éther s'obtient en égalant la dérivée seconde, prise par rapport au temps de chacun des déplacements u, v, w à une fonction linéaire de ces déplacements, et de leurs dérivées de tous les ordres prises par rapport à x, y, z.

Les seconds membres de ces équations ne renferment pas de termes indépendants de u, v, w. En effet, ils doivent s'annuler avec u, v, w, puisque le système est en équilibre quand les déplacements sont nuls.

Si on prend pour axes de coordonnées un système d'axes de l'assemblage moléculaire, les coefficients des équations sont des fonctions périodiques des coordonnées.

Le système des trois équations fondamentales peut donc s'écrire comme il suit :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} D_t^2 u &= F_1 u + F_2 v + F_3 w,\\ D_t^2 v &= G_1 u + G_2 v + G_3 w,\\ D_t^2 w &= H_1 u + H_2 v + H_3 w;\end{aligned}\right.$$

les F, G, H étant des fonctions entières symboliques de D_x, D_y, D_z, dont les coefficients sont des fonctions périodiques de x, y, z.

Le problème de la propagation de la lumière dans un milieu indéfini consiste à trouver des fonctions satisfaisant aux équations (1), et se réduisant à des fonctions données de x, y, z, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à t, pour $t = 0$.

Avant d'appliquer la méthode d'intégration, il convient d'introduire une notation qui simplifie l'écriture.

12. Le second membre de chacune des équations (1) peut être con-

sidéré comme une fonction symbolique de D_x, D_y, D_z et de u, v, w, linéaire et homogène par rapport à ces dernières variables. On peut donc écrire comme il suit le système (1) :

$$(2)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = F(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 v = G(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 w = H(D_x, D_y, D_z, u, v, w). \end{cases}$$

Les fonctions F, G, H jouissent des propriétés suivantes.

1° Si on suppose

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

on a

$$(3)\quad \begin{cases} F(D_x, D_y, D_z, u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2) = F(D_x, D_y, D_z, u_1, v_1, w_1) \\ \qquad\qquad + F(D_x, D_y, D_z, u_2, v_2, w_2). \end{cases}$$

2° Si on suppose en second lieu

$$u = u_1 \varepsilon, \quad v = v_1 \varepsilon, \quad w = w_1 \varepsilon,$$

u_1, v_1, w_1 étant des fonctions de x, y, z, et ε une exponentielle de la forme $\varepsilon = e^{ax+by+cz}$, on a

$$(4)\qquad \begin{cases} F(D_x, D_y, D_z, u_1 \varepsilon, v_1 \varepsilon, w_1 \varepsilon) \\ \quad = F(D_x + a, D_y + b, D_z + c, u_1, v_1, w_1)\varepsilon. \end{cases}$$

La première propriété est évidente : en effet, un terme quelconque $AD_x^p D_y^q D_z^r$ de la fonction F donne identiquement

$$AD_x^p D_y^q D_z^r (u_1 + u_2) = AD_x^p D_y^q D_z^r u_1 + AD_x^p D_y^q D_z^r u_2.$$

Pour établir la seconde, il suffit d'observer que le terme simple $D_x u$ donne, en supposant $u = u_1 \varepsilon$,

$$D_x u = D_x u_1 . \varepsilon + u_1 . D_x \varepsilon = (D_x u_1 + a u_1)\varepsilon,$$

ou symboliquement

$$D_x u = (D_x + a) u_1 . \varepsilon.$$

On établit de la même manière l'égalité symbolique

$$AD_x^p D_y^q D_z^r u = A(D_x + a)^p (D_y + b)^q (D_z + c)^r u_{1\cdot\varepsilon},$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (4).

13. Considérons actuellement une des équations (2), la première par exemple.

Chaque coefficient A de F est une fonction périodique de x, y, z. Désignons par a, b, c les résultats obtenus en divisant 2π par les périodes dont on peut accroître respectivement x, y, z sans changer la valeur de cette fonction, et par e, f, g les trois exponentielles imaginaires $e^{axi}, e^{byi}, e^{czi}$. D'après une propriété générale des fonctions périodiques, on a

$$(5) \qquad A = A_0 + \sum_m A_{m,m',m''} e^m f^{m'} g^{m''},$$

m, m', m'' étant trois nombres entiers positifs ou négatifs.

En développant ainsi en série tous les coefficients périodiques de F, on obtient

$$(6) \begin{cases} F(D_x, D_y, D_z, u, v, w) = F_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ \qquad + \sum_m F_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}. \end{cases}$$

Les fonctions G et H étant développées de la même manière, le système (2) devient

$$(7) \begin{cases} D_t^2 u = F_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ \qquad + \sum_m F_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}, \\ D_t^2 v = G_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ \qquad + \sum_m G_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}, \\ D_t^2 w = H_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ \qquad + \sum_m H_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}. \end{cases}$$

14. Posons actuellement

$$
(8)\quad \begin{cases} u = u_0 + \sum_n u_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}, \\ v = v_0 + \sum_n v_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}, \\ w = w_0 + \sum_n w_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}; \end{cases}
$$

$u_{n,n',n''}$, $v_{n,n',n''}$, $w_{n,n',n''}$ étant des fonctions de x, y, z, t à déterminer.

La substitution des développements (8) dans les équations (7) s'opère sans difficulté, grâce aux remarques du n° 12, et on obtient trois équations telles que la suivante :

$$
(9)\quad \begin{cases} D_t^2 u_0 + \sum_p D_t^2 u_{p,p',p''} e^p f^{p'} g^{p''} \\ \quad = F_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ \quad\quad + \sum_m F_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) e^m f^{m'} g^{m''} \\ \quad\quad + \sum_n F_0(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ \quad\quad\quad\quad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}) e^n f^{n'} g^{n''} \\ \quad\quad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ \quad\quad\quad\quad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}) e^{m+n} f^{m'+n'} g^{m''+n''}. \end{cases}
$$

En identifiant dans ces équations les coefficients des puissances semblables de e, f, g, on a un système d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants auquel doivent satisfaire les fonctions inconnues.

15. En opérant ainsi, on obtient :

1° Trois équations obtenues en identifiant les termes indépendants

de e, f, g, savoir :

$$(10)\quad\begin{cases}
D_t^2 u_0 = F_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\
\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\
\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\
D_t^2 v_0 = G_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\
\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\
\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\
D_t^2 w_0 = H_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\
\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\
\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}),
\end{cases}$$

les doubles $\sum$ s'étendant aux valeurs de m, m', m'', n, n', n'', différentes de zéro, qui satisfont aux conditions

$$m + n = 0, \quad m' + n' = 0, \quad m'' + n'' = 0.$$

2° Un système d'équations ayant une forme analogue aux trois suivantes, obtenues en identifiant les termes qui contiennent le produit $e^p f^{p'} g^{p''}$:

$$(11)\quad\begin{cases}
D_t^2 u_{p,p',p''} = F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\
\qquad + F_0(D_x + pai, D_y + p'bi, D_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\
\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\
\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\
D_t^2 v_{p,p',p''} = G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\
\qquad + G_0(D_x + pai, D_y + p'bi, D_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\
\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\
\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\
D_t^2 w_{p,p',p''} = H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\
\qquad + H_0(D_x + pai, D_y + p'bi, D_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\
\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\
\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}),
\end{cases}$$

Les doubles $\sum$ s'étendant aux valeurs de m, m', m'', n, n', n'' différentes de zéro, qui satisfont aux conditions

$$m + n = p, \quad m' + n' = p', \quad m'' + n'' = p''.$$

16. Rigoureusement, les développements (5) et (8) se composant d'un nombre infini de termes, le nombre des équations (11) est lui-même infini. Dans tout ce qui va suivre, nous raisonnerons comme si le nombre de ces équations était limité, en étendant au cas réel toutes les propriétés indépendantes du nombre des termes conservés.

17. Observant actuellement que les dimensions des intervalles dans lesquels se manifeste la périodicité des coefficients sont insensibles, on est conduit à supposer que, dans la production des phénomènes lumineux, les valeurs moyennes des déplacements ont seules une influence appréciable. En conséquence, il y a lieu d'éliminer entre les équations aux dérivées partielles (10) et (11) toutes les inconnues, à l'exception des trois qui représentent les valeurs moyennes des déplacements. Pour montrer comment on peut effectuer dans certains cas cette élimination, il est nécessaire de rappeler la méthode d'intégration applicable aux équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

18. On obtient des intégrales particulières des équations (10) et (11), en supposant toutes les inconnues proportionnelles à une même exponentielle, de sorte que

$$(12)\quad \frac{u_0}{P_0} = \frac{v_0}{Q_0} = \frac{w_0}{R_0} = \cdots = \frac{u_{n,n',n''}}{P_{n,n',n''}} = \frac{v_{n,n',n''}}{Q_{n,n',n''}} = \frac{w_{n,n',n''}}{R_{n,n',n''}} = \ldots = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \sigma t},$$

α, β, γ, σ et les P, Q, R étant des constantes réelles ou imaginaires, assujetties à satisfaire au système que l'on obtient en substituant les valeurs particulières (12) dans les équations (10) et (11), ce qui se fait très-simplement en remplaçant dans ces équations D_x, D_y, D_z, D_t, par α, β, γ, σ, et en écrivant partout P, Q, R au lieu de u, v, w.

Ces équations sont les suivantes :

$$
(13)\left\{
\begin{aligned}
&\sigma^2 P_0 = F_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0)\\
&\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(\alpha+nai, \beta+n'bi, \gamma+n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}),\\
&\sigma^2 Q_0 = G_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0)\\
&\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(\alpha+nai, \beta+n'bi, \gamma+n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}),\\
&\sigma^2 R_0 = H_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0)\\
&\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(\alpha+nai, \beta+n'bi, \gamma+n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(14)\left\{
\begin{aligned}
&\sigma^2 P_{p,p',p''}\\
&\quad = F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0)\\
&\qquad + F_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''})\\
&\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(\alpha+nai, \beta+n'bi, \gamma+n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}),\\
&\sigma^2 Q_{p,p',p''}\\
&\quad = G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0)\\
&\qquad + G_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''})\\
&\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(\alpha+nai, \beta+n'bi, \gamma+n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}),\\
&\sigma^2 R_{p,p',p''}\\
&\quad = H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0)\\
&\qquad + H_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''})\\
&\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(\alpha+nai, \beta+n'bi, \gamma+n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsque l'on connaît plusieurs intégrales particulières des équations (10) et (11), il suffit de les combiner par voie d'addition pour obtenir de nouvelles intégrales.

Une fonction quelconque de plusieurs variables pouvant d'ailleurs être représentée par la somme d'un nombre fini ou infini de termes

respectivement proportionnels à des exponentielles dont les exposants sont des fonctions linéaires réelles ou imaginaires de ces variables, il est clair que tout système d'intégrales des équations (9) sera toujours la somme d'un nombre fini ou infini d'intégrales de la forme (12).

19. Cela posé, on peut éliminer entre les équations (13) et (14) les coefficients $P_{n,n',n''}$, $Q_{n,n',n''}$, $R_{n,n',n''}$ correspondant à toutes les valeurs entières des indices, de manière à avoir trois équations entre P_0, Q_0, R_0, α, β, γ, σ. Il suffit pour cela de déduire les $P_{n,n',n''}$, $Q_{n,n',n''}$, $R_{n,n',n''}$ des équations (14) et de les substituer dans les équations (13). Leurs valeurs sont des fonctions linéaires et homogènes des termes de la forme

$$(15)\qquad \begin{cases} F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \end{cases}$$

et on peut poser, par exemple,

$$(16)\qquad \begin{cases} P_{n,n',n''} = \sum_p A_{p,p',p''}\, F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ \qquad + \sum_p B_{p,p',p''}\, G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ \qquad + \sum_p C_{p,p',p''}\, H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \end{cases}$$

les A, B, C étant des fonctions de α, β, γ, σ^2. Les expressions des $Q_{n,n',n''}$ et $R_{n,n',n''}$ sont de la même forme.

En substituant ces expressions dans les équations (13), les seconds membres de ces équations deviennent des fonctions linéaires et homogènes des termes (15), ayant pour coefficients des fonctions de α, β, γ, σ^2. Pour ne pas multiplier les notations, nous désignerons ces nouveaux coefficients par les lettres A, B, C affectées d'indices.

On a ainsi :

$$(17)\left\{\begin{aligned}
\sigma^2 P_0 = F_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) &+ \sum_p A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&+ \sum_p B_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&+ \sum_p C_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0),\\
\sigma^2 Q_0 = G_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) &+ \sum_p A'_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&+ \sum_p B'_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&+ \sum_p C'_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0),\\
\sigma^2 R_0 = H_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) &+ \sum_p A''_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&+ \sum_p B''_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0)\\
&+ \sum_p C''_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0).
\end{aligned}\right.$$

20. Nous ne considérons, dans ce Mémoire, que le cas où les fonctions A, B, C sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de α, β, γ, σ^2. C'est ce qui a lieu, en général, quand les modules de ces quantités sont très-petits par rapport aux quantités a, b, c définies au n° **15**.

En supposant, dans ce cas, les séries limitées par approximation à un certain nombre de termes, les seconds membres des équations (17) se réduisent à des fonctions entières à coefficients constants des variables α, β, γ, σ^2, P_0, Q_0, R_0 linéaires et homogènes par rapport aux trois dernières.

Or, ces équations sont alors celles que l'on obtiendrait en cherchant à intégrer, par la méthode des intégrales particulières indiquée au n° **18**, le système suivant d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants :

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
D_t^2 u &= F_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A_{p,p',p''}\, F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p B_{p,p',p''}\, G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p C_{p,p',p''}\, H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\
D_t^2 v &= G_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A'_{p,p',p''}\, F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p B'_{p,p',p''}\, G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p C'_{p,p',p''}\, H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\
D_t^2 w &= H_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A''_{p,p',p''}\, F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p B''_{p,p',p''}\, G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p C''_{p,p',p''}\, H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w),
\end{aligned}
\right.
$$

obtenu en remplaçant, dans le système (17), α, β, γ, σ, P_0; Q_0, R_0 par D_x, D_y, D_z, D_t, u, v, w, et où, par conséquent, les A, B, C sont des fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2.

21. Le système des équations (18) est donc celui qu'il s'agissait d'obtenir au n° **17**, et si on veut se borner à étudier les lois qui régissent les *vibrations atomiques moyennes* de l'éther, on est conduit à intégrer généralement le système des équations (19), qu'il convient d'appeler, avec Cauchy, *équations auxiliaires*.

Les déplacements moyens sont seuls considérés dans ce qui suit, et on peut les désigner désormais par les notations u, v, w, attribuées jusqu'à présent aux déplacements effectifs.

22. La forme des équations auxiliaires dépend d'une manière très-simple de celle des équations (2) à coefficients périodiques. En effet, un terme $F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w)$, compris dans le développe-

ment (8), s'obtient en substituant, dans la fonction

$$F(D_x, D_y, D_z, u, v, w),$$

des constantes aux coefficients périodiques. Par suite, une somme de termes de la forme

$$\sum A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w)$$

donne un résultat égal à celui que l'on obtiendrait en substituant à la place des coefficients périodiques, dans la fonction F, des fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2.

On peut donc énoncer le résultant suivant :

Théorème. — *Les trois équations auxiliaires s'obtiennent en égalant la dérivée seconde de chaque variable, prise par rapport au temps, à la somme de trois expressions obtenues en substituant des fonctions entières à coefficients constants de* D_x, D_y, D_z, D_t^2 *aux coefficients périodiques des fonctions* F, G, H *définies au* n° **12**.

23. Il importe d'observer que l'on peut, par l'emploi de substitutions successives, ramener le second membre des équations auxiliaires à ne pas renfermer de dérivées relatives au temps. En effet, si on suppose les seconds membres des équations (17) développées en séries de termes décroissants ordonnés suivant les puissances ascendantes de σ^2, on a, en réduisant ces séries aux termes indépendants de σ^2, des valeurs approchées de $\sigma^2 P_0$, $\sigma^2 Q_0$, $\sigma^2 R_0$ qui, étant substituées dans les termes en σ^2 des séries, donnent lieu à une seconde approximation, et ainsi de suite.

En opérant ainsi, on élimine σ dans les seconds membres des équations (17), et par conséquent D_t dans les seconds membres des équations (20).

On peut alors, dans l'énoncé du théorème précédent, substituer aux fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2 des fonctions entières de D_x, D_y, D_z seulement.

24. En résumé, comme conclusion de l'analyse qui précède, on

obtient les deux propositions suivantes, fondamentales dans la théorie mathématique des phénomènes lumineux :

Théorème I. — *Dans tout milieu cristallisé, les trois équations qui régissent les vibrations très-petites de l'éther sont des équations linéaires aux dérivées partielles que l'on obtient en égalant la dérivée seconde prise par rapport au temps de chacun des trois déplacements u, v, w à une fonction linéaire, à coefficients périodiques, de ces déplacements et de leurs dérivées partielles de tous les ordres prises par rapport à x, y, z.*

Théorème II. — *Dans tout milieu cristallisé, les trois équations qui régissent les vibrations moyennes de l'éther sont des équations linéaires, aux dérivées partielles et à coefficients constants, que l'on obtient en égalant la dérivée seconde de chaque déplacement moyen prise par rapport au temps, à la somme de trois expressions résultant de la substitution de fonctions entières de D_x, D_y, D_z aux coefficients périodiques des seconds membres des équations auxquelles satisfont, d'après le théorème précédent, les déplacements effectifs.*

Si donc on représente par

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} D_t^2 u &= F(D_x, D_y, D_z, u, v, w),\\ D_t^2 v &= G(D_x, D_y, D_z, u, v, w),\\ D_t^2 w &= H(D_x, D_y, D_z, u, v, w),\end{aligned}\right.$$

les équations à coefficients périodiques auxquelles satisfont les déplacements effectifs, les équations auxiliaires auxquelles satisfont les déplacements moyens seront de la forme

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} D_t^2 u &= F' + G' + H',\\ D_t^2 v &= F'' + G'' + H'',\\ D_t^2 w &= F''' + G''' + H''',\end{aligned}\right.$$

F', F'', F''' désignant des fonctions symboliques obtenues en substituant des fonctions entières de D_x, D_y, D_z aux coefficients périodiques de la fonction F, et G', G'', G''', ainsi que H', H'', H''', se déduisant de la même manière des fonctions G et H.

25. Ces résultats, obtenus en supposant les axes de coordonnées parallèles aux arêtes d'un parallélipipède élémentaire de l'assemblage cristallin, subsistent avec des axes quelconques.

Supposons, en effet, que les équations (2) soient celles qui représentent les vibrations de l'éther rapportées non plus à un système S' d'axes parallèles aux arêtes d'un parallélipipède élémentaire, mais à un système S d'axes dirigé d'une manière quelconque.

Soient x', y', z' et x, y, z les coordonnées d'un point par rapport aux systèmes S' et S; x', y', z' étant des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z.

Un coefficient quelconque des équations (2), fonction périodique de x', y', z', est développable en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de trois exponentielles dont les exposants sont des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z. En désignant par e, f, g ces trois exponentielles, les équations (5), (7), (8) subsistent, et l'on voit aisément que rien n'est à changer aux conséquences qui s'en déduisent.

On peut donc rapporter les vibrations de l'éther à un système d'axes *rectangulaires*, quel que soit le système cristallin. Après avoir déterminé la forme correspondante des fonctions F, G, H, on en déduira les équations auxiliaires par la règle que fournit le deuxième théorème du n° **24**.

25. Par suite de cette règle, tout se réduit à déterminer pour chaque milieu la forme des fonctions F, G, H. L'analyse du n° **9** établit la forme essentielle des fonctions dont il s'agit avec une généralité qu'on ne peut restreindre sans admettre de nouvelles hypothèses sur la constitution intime de l'éther et de la matière.

Un second Mémoire sera consacré à examiner les résultats auxquels conduit une hypothèse fort simple dont les conséquences paraissent conformes aux faits d'expérience. Cette hypothèse réduit notablement la forme des fonctions F, G, H, et par suite celle des équations auxiliaires.

Enfin, de nouvelles et importantes simplifications résultent de la symétrie propre au milieu cristallisé que l'on considère. C'est à l'étude de ces réductions qui établissent de remarquables relations entre les

phénomènes optiques et les lois cristallographiques qu'est consacré le Chapitre II du présent Mémoire.

26. En dehors de toute hypothèse et en laissant aux équations auxiliaires toute la généralité qu'elles comportent, elles renferment un nombre fort considérable de coefficients indéterminés.

Si l'on suppose, par exemple, que les fonctions F, G, H sont du second ordre par rapport à D_x, D_y, D_z et renferment les six dérivées partielles de chaque déplacement, si de plus on se borne dans les équations auxiliaires aux termes du second ordre, on voit que le nombre total des coefficients distincts peut s'élever à $18 \times 3 = 54$.

27. Il importe d'observer que le théorème général du n° **24** a été obtenu en supposant (n° **20**) que les fonctions A, B, C sont développables en séries très-convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de α, β, γ, σ^2. Cette condition est remplie en général quand les modules des quantités α, β, γ, σ^2 sont très-petits par rapport à a, b, c : ce qui a lieu, dans les corps transparents, quand les longueurs d'ondulation sont très-grandes par rapport aux intervalles moléculaires. Dans le cas contraire, les fonctions A, B, C doivent être considérées comme des fonctions transcendantes. Il y a lieu de supposer que cette circonstance peut se présenter, dans les corps solides, pour les ondes les plus courtes, c'est-à-dire pour les rayons chimiques, et dans les corps gazeux ou vapeurs, dont les intervalles moléculaires sont plus grands, pour les ondes lumineuses ou même pour les ondes obscures.

Dans ce cas, la propagation de la lumière peut donc s'effectuer suivant des lois toutes spéciales. Nous ne faisons qu'indiquer ici ces circonstances remarquables, nous bornant à observer que, dans tous les cas, on obtient une infinité d'intégrales particulières des équations à coefficients périodiques, en égalant les déplacements aux produits d'une même exponentielle $e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \sigma t}$ par des fonctions périodiques de x, y, z dont les coefficients sont des fonctions généralement transcendantes de α, β, γ, σ^2, ces derniers paramètres étant liés entre eux par une équation caractéristique généralement transcendante.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES DE L'ÉTHER D'APRÈS LA SYMÉTRIE PROPRE AUX DIVERS SYSTÈMES CRISTALLINS.

1. Les corps cristallisés sont considérés comme composés de molécules polyédriques semblablement orientées, et dont les centres de gravité forment un *assemblage* de points distribués régulièrement. En admettant cette hypothèse, on est conduit à étudier les particularités qui résultent, au point de vue des phénomènes optiques, de la symétrie que peuvent présenter le polyèdre moléculaire et l'assemblage moléculaire.

2. M. Delafosse a signalé le premier le rôle important de la symétrie moléculaire dans les phénomènes cristallographiques, et spécialement dans celui qui est connu sous le nom d'*hémiédrie*. Dans une série de beaux Mémoires dont l'ensemble constitue une véritable cristallographie rationnelle, Bravais a montré comment les faits observés et les lois connues s'expliquaient par la symétrie moléculaire et la symétrie de l'assemblage. Il est indispensable de résumer brièvement ces remarquables travaux qui se rattachent intimement à l'étude des phénomènes optiques que présentent les cristaux.

3. Bravais a donné d'abord [*] une classification complète des polyèdres, au point de vue de leur symétrie.

Un polyèdre, ou plus généralement un système de points, peut présenter trois éléments de symétrie :

1° L'élément centre de symétrie;

2° L'élément axe de symétrie;

3° L'élément plan de symétrie.

Un point est centre de symétrie d'un système lorsque les points du système pris deux à deux sont rangés sur des diagonales dont ce point est le milieu.

Un *axe de symétrie* est une droite telle, qu'il suffit d'imprimer au

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, t. XIV.

système une certaine rotation autour de cette droite pour substituer les divers points les uns aux autres. Le rapport de la circonférence au plus petit des arcs mesurant la rotation est toujours un nombre entier qui mesure l'*ordre* de la symétrie de l'axe. Un axe est dit *principal* quand il est parallèle ou perpendiculaire à tous les axes ou plans de symétrie du système. Un système dénué d'axe principal est dit *sphéroédrique*.

Enfin, *un plan de symétrie* est un plan tel, que les points du système sont deux à deux à égales distances de ce plan sur des droites qui lui sont perpendiculaires.

L'existence de deux de ces trois sortes d'éléments entraîne l'existence de la troisième.

4. Les polyèdres peuvent être divisés en vingt-trois classes réparties entre six groupes distincts comprenant :

1° Les polyèdres asymétriques (ne possédant aucun élément de symétrie);

2° Les polyèdres symétriques, sans axes;

3° Les polyèdres symétriques ayant un axe principal d'ordre pair;

4° Les polyèdres symétriques ayant un axe principal d'ordre impair;

5° Les polyèdres sphéroédriques à quatre axes ternaires;

6° Les polyèdres sphéroédriques à dix axes ternaires.

5. Après avoir étudié les divers genres de symétrie que peuvent présenter les polyèdres moléculaires, Bravais a examiné la symétrie de l'assemblage, c'est-à-dire la symétrie d'un *système réticulaire* de points déterminés par l'intersection de trois systèmes de plans équidistants et parallèles [*].

Il a démontré d'abord que l'ordre de la symétrie d'un système réticulaire ne pouvait être qu'un des nombres 2, 3, 4, 6, de sorte que la symétrie d'un axe de l'assemblage est nécessairement binaire, ternaire, quâternaire ou sénaire. Cela posé, classant les assemblages d'après la nature et le nombre de leurs axes de symétrie, il les a divisés en sept groupes ou *systèmes* distincts.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIIe Cahier.

Pour rappeler avec concision la nature de la symétrie qui caractérise chaque système, nous emploierons la notation de Bravais. Dans cette notation :

La lettre C représente un centre de symétrie;

Les symboles Λ^2, L^2,... représentent des axes de symétrie binaires; Λ^3, L^3,... des axes de symétrie ternaires, et ainsi de suite;

La lettre Λ s'applique toujours à l'axe principal;

La lettre Π représente un plan de symétrie normal à l'axe principal;

La lettre P^2 un plan de symétrie normal à un axe binaire L^2;

La lettre P^3 un plan de symétrie normal à un axe ternaire L^3, et ainsi de suite.

Le nombre des axes d'un ordre est marqué par un coefficient précédant la lettre qui désigne un de ces axes : le nombre des plans de symétrie est marqué de la même manière.

Cela posé, la symétrie des sept systèmes est représentée par les notations du tableau ci-dessous.

NUMÉRO du système.	NOM de la symétrie.	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE.
1	Terquaternaire. . .	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$
2	Sénaire.	Λ^6, $6L^2$, C, Π, $6P^2$
3	Quaternaire.	Λ^4, $4L^2$, C, Π, $4P^2$
4	Ternaire.	Λ^3, $3L^2$, C, Π, $3P^2$
5	Terbinaire.	Λ^2, $2L^2$, C, Π, $2P^2$
6	Binaire.	Λ^2, C, Π
7	Asymétrique.	$0L$, C, 0Π

Dans un assemblage quelconque, chaque sommet étant un centre de symétrie, la lettre C se présente dans la notation de la symétrie de chaque système.

La notation même de la symétrie des six derniers systèmes rappelle immédiatement la situation relative des divers éléments de symétrie

qui les caractérisent. Ainsi, par exemple, pour le deuxième système, on voit que les six axes binaires sont dans le plan Π perpendiculaire à l'axe principal Λ et situés de manière que deux consécutifs de ces axes comprennent un angle de $\frac{360}{6} = 60$ degrés. Les six plans de symétrie sont perpendiculaires à ces six axes, et leur intersection est l'axe principal Λ.

Dans le premier système, les trois axes quaternaires, les quatre axes ternaires et les six axes binaires sont disposés comme le sont, dans un cube, les lignes joignant deux à deux : 1° les centres des faces opposées; 2° les sommets opposés; 3° les milieux des arêtes opposées.

6. Après ces études préliminaires, Bravais a examiné comment la symétrie d'une molécule peut être transmise, par la cristallisation, à l'assemblage moléculaire. Il a fait voir, à ce sujet, que l'équilibre doit s'établir plus facilement, dans un cristal qui se forme, si les centres de gravité des molécules se placent de manière que les axes et plans de symétrie de ces molécules, indéfiniment prolongés, deviennent des axes et plans de symétrie de l'assemblage moléculaire.

Il a admis, en conséquence, la règle suivante : Parmi les sept systèmes cristallins possibles, les molécules d'une substance donnée qui vient à cristalliser adoptent celui dont la symétrie offre le plus d'éléments communs avec la symétrie propre à leur polyèdre moléculaire.

Il a été conduit, en outre, à admettre que, dans le cas où plusieurs systèmes cristallins présenteraient les mêmes éléments de symétrie communs à leurs assemblages moléculaires et au polyèdre moléculaire donné, la cristallisation se fera suivant le système de moindre symétrie.

C'est d'après ces deux règles que Bravais a déterminé le système dans lequel doit cristalliser une substance dont le polyèdre moléculaire a une symétrie donnée.

7. On voit, d'après ce qui précède, que le polyèdre moléculaire d'une substance donnée et son assemblage cristallin possèdent en général des éléments de symétrie communs. Mais certains éléments de symétrie possibles dans un polyèdre sont impossibles dans un système réticulaire : par suite, ces éléments ne se transmettront pas de la molécule à l'assemblage moléculaire. Inversement, la coexistence de cer-

tains éléments de symétrie étant nécessaire dans un système réticulaire sans être nécessaire dans un polyèdre, on conçoit que le système cristallin d'une substance peut posséder certains éléments de symétrie absents dans la molécule.

A ce sujet, nous rappellerons quelques définitions données par Bravais.

Un cristal dans lequel le polyèdre moléculaire possède tous les éléments de symétrie de l'assemblage est dit *holoédrique*. Lorsque certains éléments de symétrie de l'assemblage manquent dans la molécule, le cristal est dit *mériédrique*.

Le polyèdre moléculaire est dit *holoaxe* lorsqu'il a tous les axes de symétrie de l'assemblage. Il est dit *hémiaxe* lorsque l'ordre de la symétrie de ses axes d'un certain ordre pair est moitié moindre que l'ordre de la symétrie des axes parallèles de l'assemblage. Il est dit *tétartoaxe* quand cette réduction à moitié a lieu pour tous les axes d'ordre pair ayant la même direction dans le polyèdre moléculaire et dans l'assemblage.

Tout polyèdre moléculaire qui ne possède ni centre ni plans de symétrie est dit *hémisymétrique*.

Tout polyèdre qui possède un centre de symétrie sera dit polyèdre *centré*.

Enfin, tout polyèdre dépourvu de centre, mais possédant un ou plusieurs plans de symétrie, est appelé *dichosymétrique*. Les mêmes désignations peuvent s'appliquer aux cristaux auxquels les polyèdres donnent naissance.

De là résulte la classification suivante des polyèdres moléculaires et des cristaux :

1° Holoaxes centrés ou holoédriques;
2° Holoaxes hémisymétriques;
3° Hémiaxes centrés;
4° Hémiaxes dichosymétriques;
5° Hémiaxes hémisymétriques;
6° Tétartoaxes centrés;
7° Tétartoaxes dichosymétriques;
8° Tétartoaxes hémisymétriques.

Bravais a montré comment les phénomènes cristallographiques

observés sur les cristaux doivent varier avec celle de ces huit catégories à laquelle appartient leur polyèdre moléculaire. En appliquant, en particulier, sa théorie à la détermination de la forme cristalline, c'est-à-dire du nombre des faces possibles dans un cristal, il a montré comment et suivant quelles lois, dans chaque système, l'absence, dans le polyèdre moléculaire, de certains éléments de symétrie de l'assemblage, entraînait une réduction du nombre des faces de manière à produire les phénomènes désignés par les cristallographes sous les noms de *hémiédrie* et *tétartoédrie*.

8. En résumé, les travaux dont nous venons de donner un aperçu établissent une relation entre la forme cristalline des diverses substances et la symétrie de leur molécule.

La forme cristalline se déduit théoriquement d'une symétrie moléculaire donnée et, inversement, la symétrie moléculaire d'une substance se déduit de sa forme cristalline observée.

Nous replaçant actuellement sur le terrain de l'optique théorique, nous sommes conduits à admettre une relation nécessaire entre la constitution que présente l'éther dans un cristal et la symétrie de sa molécule et de son assemblage. L'expression analytique de cette relation assigne aux équations des mouvements vibratoires une forme spéciale, variable avec la symétrie cristalline et à laquelle correspondent des phénomènes particuliers. On voit ainsi comment les deux théories, cristallographique et optique, établissent parallèlement une mutuelle dépendance entre les phénomènes lumineux que présentent les corps cristallisés et leur forme cristalline.

Le présent Chapitre de ce Mémoire est consacré à rechercher comment la forme des équations auxiliaires varie non-seulement avec le système cristallin, mais encore avec les différents cas de mériédrie qui peuvent se présenter dans chaque système.

Analyse.

9. L'analyse qui fait l'objet de ce Chapitre est fondée sur la remarque suivante.

La constitution de l'éther variant d'un point à un autre dans l'in-

térieur d'un cristal, d'après une loi qui dépend de l'action résultante exercée par la matière sur chacun de ses points, doit se reproduire la même partout où cette action est la même. Par suite, tout élément de symétrie des atomes matériels, c'est-à-dire tout élément de symétrie commun au polyèdre moléculaire du cristal et à son assemblage moléculaire, doit être considéré comme un élément de symétrie des atomes de l'éther.

Par suite, les équations des mouvements vibratoires des atomes de l'éther rapportés à un système d'axes S_1 ne doivent pas différer de celles que l'on obtient en rapportant les vibrations à un second système d'axes S_2 symétrique du premier par rapport à un centre ou plan de symétrie, commun au polyèdre et à l'assemblage moléculaires, ou obtenu en faisant tourner le premier de l'angle $\frac{2\pi}{n}$ autour d'un axe d'ordre n commun au polyèdre et à l'assemblage moléculaires.

Or cette transformation de coordonnées revient analytiquement à appliquer une substitution linéaire aux coordonnées x, y, z, et cette substitution doit transformer en elles-mêmes les équations auxiliaires auxquelles satisfont les vibrations moyennes de l'éther.

De cette condition dérive la forme particulière qui résulte, pour ces équations, de chacun des éléments de symétrie communs à la molécule et à l'assemblage.

10. *Lemme.* — On résout généralement ce problème en se fondant sur la proposition suivante :

Il existe généralement trois fonctions linéaires et homogènes de la forme $Ax + By + Cz$ qu'une substitution linéaire reproduit à un facteur constant près.

En effet, pour que la fonction

$$Ax + By + Cz$$

se reproduise multipliée par un certain facteur s, quand on y remplace x, y, z par

$$(1)\qquad \begin{cases} lx + my + nz, \\ l'x + m'y + n'z, \\ l''x + m''y + n''z, \end{cases}$$

il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(2)\qquad \begin{cases} Al + Bl' + Cl'' = sA, \\ Am + Bm' + Cm'' = sB, \\ An + Bn' + Cn'' = sC; \end{cases}$$

or, ces trois équations déterminent s et des quantités proportionnelles à A, B, C; s est une des trois racines de l'équation

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} l-s, & l', & l'', \\ m, & m'-s, & m'' \\ n, & n', & n''-s \end{vmatrix} = 0,$$

et à ces trois racines correspondent trois systèmes de valeurs de A, B, C.

11. Cela posé, considérons les équations auxiliaires. En désignant, pour abréger, D_x, D_y, D_z, D_t par α, β, γ, σ, ces équations sont de la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \sigma^2 v = G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ \sigma^2 w = H_1 u + H_2 v + H_3 w; \end{cases}$$

les F, G, H étant des fonctions entières à coefficients constants de α, β, γ. Supposons actuellement que l'on change la direction des axes de manière à substituer à x, y, z les expressions (1). Il est aisé de voir que, pour obtenir les transformées du système (3), il suffit d'y faire les substitutions suivantes :

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ lu + mv + nw, & l'u + m'v + n'w, & l''u + m''v + n''w \end{pmatrix},$$

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ l\alpha + m\beta + n\gamma, & l'\alpha + m'\beta + n'\gamma, & l''\alpha + m''\beta + n''\gamma \end{pmatrix}.$$

Admettons qu'en opérant ainsi on reproduise identiquement le système (3).

12. Pour apercevoir plus aisément les conséquences de cette con-

dition, introduisons comme variables les trois fonctions linéaires de u, v, w que la substitution linéaire multiplie par s, s', s'' racines de l'équation (3). Soient u', v', w' ces fonctions, et α', β', γ' les fonctions analogues de α, β, γ.

Il est clair que le système (3) peut être remplacé par un système équivalent de la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u' = f_1 u' + f_2 v' + f_3 w', \\ \sigma^2 v' = g_1 u' + g_2 v' + g_3 w', \\ \sigma^2 w' = h_1 u' + h_2 v' + h_3 w', \end{cases}$$

les f, g, h étant des fonctions entières de α', β', γ'. Cela posé, ce nouveau système se transforme par la substitution dans le suivant :

$$(8)\qquad \begin{cases} s\sigma^2 v' = sf'_1 u' + s'f'_2 v' + s''f'_3 w', \\ s'\sigma^2 v' = sg'_1 u' + s'g'_2 v' + s''g'_3 w', \\ s''\sigma^2 w' = sh'_1 u' + s'h'_2 v' + s''h'_3 w', \end{cases}$$

où les f', g', h' représentent les transformées des f, g, h.

Pour que les systèmes (7) et (8) soient identiques, il faut que

$$(9)\qquad \begin{cases} f'_1 = f_1, & s'f'_2 = sf_2, & s''f'_3 = sf_3, \\ sg'_1 = s'g_1, & g'_2 = g_2, & s''g'_3 = s'g_3, \\ sh'_1 = s''h_1, & s'h'_2 = s''h_2, & h'_3 = h_3. \end{cases}$$

Des conditions (9) résulte la forme nécessaire des f, g, h. Considérons en effet une de ces fonctions, f_2 par exemple, et soit $A\alpha'^p\beta'^q\gamma'^r$ un de ses termes; ce terme devient par la substitution $A\alpha'^p\beta'^q\gamma'^r s^p s'^q s''^r$ et la condition $s'f'_2 = sf_2$ exige que l'on ait $s^p s'^{q+1} s''^r = s$. Il ne devra donc entrer dans f_2 que des termes tels, que les exposants entiers p, q, r satisfassent à la relation ci-dessus. Si cette condition est réalisable avec la substitution donnée, on détermine ainsi la forme des f, g, h et par suite celle des équations (7), d'où on déduit enfin les équations (4).

Quand on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, l'équation (3) a pour racines l'unité et

deux imaginaires conjuguées à module égal à l'unité. On a donc

$$s = 1, \quad s' = e^{\varphi i}, \quad s'' e^{-\varphi i}.$$

La condition

$$s^p s'^{q+1} s''^r = s$$

devient alors

$$e^{(q+1-r)\varphi i} = 1 :$$

d'où on déduit

$$q + 1 - r = \frac{2j\pi}{\varphi},$$

j désignant un nombre entier quelconque.

La condition n'est donc réalisable que si l'argument φ est commensurable avec la circonférence 2π.

13. Après avoir exposé ainsi la méthode générale, cherchons la forme des équations auxiliaires quand le polyèdre et l'assemblage moléculaires ont en commun :

1° Un centre de symétrie ;

2° Un plan de symétrie ;

3° Un axe de symétrie.

1° *Centre de symétrie.*

14. Prenons un centre comme origine. Les équations ne sont pas altérées quand on change le sens des x, y, z positifs, c'est-à-dire quand on fait les substitutions

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & -v, & -w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & -\beta, & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Donc les F, G, H ne doivent renfermer que des termes de degré pair par rapport à α, β, γ.

2° *Plan de symétrie.*

15. Prenons le plan de symétrie pour plan des yz. Les équations ne doivent pas être altérées quand on change le sens des x positifs, et par suite quand on y change le signe de u et α.

Donc F_1, G_2, G_3, H_2, H_3 sont des fonctions paires et F_2, F_3, G_1, H_1 des fonctions impaires de α.

3° *Axe de symétrie.*

16. Prenons l'axe de symétrie pour axe des x, et soit φ l'angle dont on peut déplacer solidairement dans leur plan les oy, oz sans altérer la forme des équations (4). Le changement d'axes entraîne la substitution

$$(11)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w, \\ u, & v\cos\varphi - w\sin\varphi, & v\sin\varphi + w\cos\varphi \end{pmatrix},$$

de sorte que les coefficients de la substitution (5) sont

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, \\ 0, & \cos\varphi, & -\sin\varphi, \\ 0, & \sin\varphi, & \cos\varphi; \end{matrix}$$

les racines de l'équation (3) sont

$$s = 1, \quad s' = e^{\varphi i}, \quad s'' = e^{-\varphi i},$$

et l'on a enfin

$$\begin{aligned} u' &= u, & v' &= v + wi, & w' &= v - wi, \\ \alpha' &= \alpha, & \beta' &= \beta + \gamma i, & \gamma' &= \beta - \gamma i. \end{aligned}$$

Par conséquent, les deux premières des équations (7) deviennent

$$(12)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 (v + wi) + f_3 (v - wi), \\ \sigma^2 (v + wi) = g_1 u + g_2 (v + wi) + g_3 (v - wi), \end{cases}$$

les f, g, h désignant des fonctions entières, généralement imaginaires, de α, $\beta + \gamma i$, $\beta - \gamma i$. Il est inutile d'écrire la troisième équation, qui se déduit de la seconde en y changeant le signe de i.

Dans ce cas, les équations (9) deviennent

$$(13)\qquad \begin{cases} f'_1 = f_1, & f'_2 = e^{-\varphi i} f_2, & f'_3 = e^{\varphi i} f_3, \\ g'_1 = e^{\varphi i} g_1, & g'_2 = g_2, & g'_3 = e^{2\varphi i} g_3. \end{cases}$$

17. Il reste à déterminer la forme générale des fonctions qui satisfont à ces conditions. Soit $A\alpha^p(\beta+\gamma i)^q(\beta-\gamma i)^r$ le terme général d'une fonction que la substitution reproduit identiquement. La substitution multipliant ce terme par $e^{(q-r)\varphi i}$, on aura $e^{(q-r)\varphi i}=1$, et par suite $(q-r)\varphi=2j\pi$, j désignant un nombre entier quelconque. Il en résulte la condition

$$(14)\qquad q-r=j\omega;$$

$\omega=\frac{2\pi}{\varphi}$ étant l'ordre de la symétrie; posons

$$q=q'+k\omega,$$
$$r=r'+l\omega,$$

k et l désignant des entiers positifs, et q' et r' des résidus positifs inférieurs à ω. La condition (14) entraînera évidemment la relation $r'=q'$, ce qui montre que le terme général peut être mis sous la forme

$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{q'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}.$$

Si donc on pose

$$(15)\qquad X+Yi=(\beta+\gamma i)^{\omega},$$

on obtient le théorème suivant :

Toute fonction entière des variables α, β, γ se reproduisant identiquement, quand on applique à ces variables la substitution

$$(16)\qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha, & \beta\cos\varphi-\gamma\sin\varphi, & \beta\sin\varphi+\gamma\cos\varphi\end{pmatrix},$$

est une fonction entière des quantités

$$\alpha,\quad \beta^2+\gamma^2,\quad X,\quad Y,$$

X et Y représentant les parties réelle et imaginaire de $(\beta+\gamma i)^{\omega}$, et ω désignant le rapport, supposé entier, de l'angle φ à la circonférence.

Nous appellerons *invariantes* les fonctions de cette forme jouissant de la propriété de ne pas être altérées par la substitution (16).

18. Supposons, en second lieu, que la fonction dont le terme général est $A\alpha^p(\beta+\gamma i)^q(\beta-\gamma i)^r$ soit multipliée, lorsqu'on lui applique la substitution (16), par le facteur $e^{n\varphi i}$, n désignant un nombre entier inférieur à ω. On a, dans ce cas, la condition

$$(17) \qquad q-r=j\omega+n,$$

et en posant, comme précédemment,

$$q=q'+k\omega,$$
$$r=r'+l\omega,$$

on voit que la différence $q'-(r'+n)$ doit être un multiple de ω. Or, q' et r' variant de 0 à $\omega-1$, et n variant de 1 à $\omega-1$, la différence dont il s'agit varie de $\omega-2$ à $-(2\omega-2)$. On doit donc avoir

$$q'-(r'+n)=0, \quad \text{d'où} \quad q'=r'+n,$$

ou bien

$$q'-(r'+n)=-\omega, \quad \text{d'où} \quad r'=q'+\omega-n;$$

par suite, le terme général présente une des deux formes

$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{r'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}(\beta+\gamma i)^n,$$
$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{q'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}(\beta-\gamma i)^{\omega-n}.$$

On en déduit le théorème suivant :

Toute fonction entière de α, β, γ, que la substitution (16) multiplie par $e^{n\varphi i}$, n étant un nombre entier inférieur à ω, est de la forme

$$F(\beta+\gamma i)^n+G(\beta-\gamma i)^{\omega-n},$$

F et G désignant deux fonctions entières *invariantes* de α, β, γ.

On démontre de la même manière que toute fonction que la substi-

tution multiplie par $e^{-n\varphi i}$ est de la forme

$$F(\beta - \gamma i)^n + G(\beta + \gamma i)^{\omega - n}.$$

19. Si on pose actuellement

$$(18)\quad \begin{cases} X + Yi = (\beta + \gamma i)^{\omega}, \\ X_1 + Y_1 i = (\beta + \gamma i)^{\omega - 1}, \\ X_2 + Y_2 i = (\beta + \gamma i)^{\omega - 2}, \end{cases}$$

il résulte des formules (13) et des théorèmes précédemment démontrés :

1° Que les fonctions f_1 et g_2 sont des fonctions invariantes de α, β, γ. La fonction f_1 est réelle.

2° Que les fonctions f_2, f_3, g_1, g_3 sont de la forme

$$(19)\quad \begin{cases} f_2 = \psi\,(\beta - \gamma i) + \chi\,(X_1 + Y_1 i), \\ f_3 = \psi'(\beta + \gamma i) + \chi'(X_1 - Y_1 i), \\ g_1 = \psi''(\beta + \gamma i) + \chi''(X_1 - Y_1 i), \\ g_3 = \psi'''(\beta + \gamma i)^2 + \chi'''(X_2 - Y_2 i), \end{cases}$$

les ψ et χ désignant des fonctions entières invariantes de α, β, γ.

De plus, les fonctions f_2, f_3 étant évidemment conjuguées, il en est de même des fonctions ψ et ψ', et des fonctions χ et χ'.

Cela posé, écrivant $g_2 + G_2 i$ à la place de g_2, et désignant les fonctions

$$\psi,\quad \psi',\quad \psi'',\quad \psi''',$$
$$\chi,\quad \chi',\quad \chi'',\quad \chi''',$$

respectivement par

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{f_2 - f_3 i}{2},\quad \dfrac{\varphi_2 - \varphi_3 i}{2},\quad g_1 + G_1 i,\quad g_3 + G_3 i, \\ \dfrac{f_2 + f_3 i}{2},\quad \dfrac{\varphi_2 + \varphi_3 i}{2},\quad h_1 + H_1 i,\quad h_2 + H_3 i, \end{cases}$$

on parvient aisément à mettre les équations (12) sous la forme sui-

vante, qui est la forme la plus générale des équations auxiliaires dans un milieu cristallisé ayant un axe de symétrie d'ordre ω :

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1 u + f_2(\beta v + \gamma w) + f_3(\beta w - \gamma v) \\
&\quad + \varphi_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3(X_1 w + Y_1 v), \\
\sigma^2 v &= g_2 v - G_2 w + (g_1\beta - G_1\gamma)u + (g_3\beta - G_3\gamma)(\beta v + \gamma w) \\
&\quad + (g_3\gamma + G_3\beta)(\beta w - \gamma v) \\
&\quad + (h_1 X_1 + H_1 Y_1)u + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2(X_2 w + Y_2 v), \\
\sigma^2 w &= g_2 w + G_2 v + (g_1\gamma + G_1\beta)u + (g_3\gamma + G_3\beta)(\beta v + \gamma w) \\
&\quad - (g_3\beta - G_3\gamma)(\beta w - \gamma v) \\
&\quad + (H_1 X_1 - h_1 Y_1)u + H_2(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v),
\end{aligned}
\right.
$$

les fonctions f, φ, g, G, h, H étant des fonctions réelles de

$$\alpha, \quad \beta^2 + \gamma^2, \quad X, \quad Y,$$

et les X, Y ayant les valeurs fournies par les formules (18).

20. Nous passons actuellement à l'étude des équations particulières propres à chaque système cristallin et aux divers cas de mériédrie réalisés dans la nature.

1° *Système asymétrique.*

La seule réduction se présente quand la molécule est centrée. Dans ce cas, les termes d'ordre impair disparaissent dans les équations.

2° *Système binaire.*

Prenons l'axe de symétrie pour axe des x. Les équations (4) doivent rester inaltérées quand on y substitue $-v$, $-w$ à v, w, et $-\beta$, $-\gamma$ à β, γ. Il en résulte que F_1, G_2, G_3, H_2, H_3 ne doivent pas changer quand on y change le signe de β, γ, et F_2, F_3, G_1, H_1 doivent changer de signe par la même substitution. Les fonctions non altérées ne renferment que des termes d'ordre pair par rapport à β, γ, et les autres des termes d'ordre impair par rapport aux mêmes variables.

Dans le système binaire, on a deux cas à considérer :

1° *Holoaxie centrée* (Λ^2, C, P). — Les équations sont composées de termes d'ordre pair par rapport à α, β, γ.

2° *Holoaxie hémisymétrique* (Λ^2, oC, oP). — Les équations renferment des puissances paires et impaires de α.

3° *Symétrie terbinaire.*

21. 1° *Holoaxie hémisymétrique* (Λ^2, $2L^2$, oC, oP). — Les équations ne doivent pas être altérées quand on y change le signe des variables comprises dans un des trois groupes suivants :

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{llll} v, & w; & \beta, & \gamma, \\ w, & u; & \gamma, & \alpha, \\ u, & v; & \alpha, & \beta; \end{array}\right.$$

il est aisé d'en déduire la forme des F, G, H.

En effet, la fonction F_1 ne devant être altérée par aucune des trois substitutions doit être composée de termes $A\alpha^p\beta^q\gamma^r$ tels, que les sommes $q+r$, $r+p$, $p+q$ soient des nombres pairs. Donc p, q, r sont simultanément pairs ou impairs, suivant que la somme $p+q+r$ est paire ou impaire. Par suite, la fonction F_1 est de la forme

$$(23)\qquad F_1 = f_1 + \varphi_1\alpha\beta\gamma,$$

f_1 et φ_1 désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

La fonction F_2 change de signe par la première et la seconde substitution, et ne change pas par la troisième : par suite, $q+r$, $r+p$ sont impairs et $p+q$ pair. Il en résulte : 1° que si le degré $p+q+r$ du terme général est pair, p et q sont impairs et r pair; 2° si le degré $p+q+r$ est impair, p et q sont pairs et r est impair. On en conclut que la fonction F_2 est de la forme

$$(24)\qquad F_2 = f_2\alpha\beta + \varphi_2\gamma,$$

f_2 et φ_2 désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

On détermine de même les autres fonctions, et on obtient les équa-

tions auxiliaires sous la forme suivante :

$$(25)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w + \varphi_1 \alpha\beta\gamma u + \varphi_2 \gamma v + \varphi_3 \beta w, \\ \sigma^2 v = g_1 \alpha\beta u + g_2 v + g_3 \beta\gamma w + \chi_1 \gamma u + \chi_2 \alpha\beta\gamma v + \chi_3 \alpha w, \\ \sigma^2 w = h_1 \alpha\gamma u + h_2 \beta\gamma v + h_3 w + \psi_1 \beta u + \psi_2 \alpha v + \psi_3 \alpha\beta\gamma w, \end{cases}$$

les f, g, h, φ, χ, ψ désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

22. 2° *Holoaxie centrée* [Λ^2, $2L^2$, C, Π, $2P$]. — Les termes d'ordre impair disparaissant, les équations sont

$$(26)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w, \\ \sigma^2 v = g_1 \beta\alpha u + g_2 v + g_3 \beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = h_1 \gamma\alpha u + h_2 \gamma\beta v + h_3 w. \end{cases}$$

23. 3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^2, $0L^2$, $0C$, $2P$]. — Prenons l'axe de symétrie Λ^2 pour axe des x, les axes des y et z étant respectivement perpendiculaires aux deux plans de symétrie. Les équations (4) ne doivent pas être altérées quand on y change le signe de v, β, ou bien de w, γ.

On voit, par suite, que F_1 est une fonction paire de β et de γ, réductible à la forme

$$(27)\qquad F_1 = f_1 + \varphi_1 \alpha,$$

f_1 et φ_1 étant fonctions de α^2, β^2, γ^2.

F_2 est une fonction impaire de β et paire de γ, réductible à la forme

$$(28)\qquad F_2 = f_2 \alpha\beta + \varphi_2 \beta,$$

f_2 et φ_2 étant également fonctions de α^2, β^2, γ^2.

Les équations auxiliaires sont les suivantes :

$$(29)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w + \varphi_1 \alpha u + \varphi_2 \beta v + \varphi_3 \gamma w, \\ \sigma^2 v = g_1 \beta\alpha u + g_2 v + g_3 \beta\gamma w + \chi_1 \beta u + \chi_2 \alpha v + \chi_3 \alpha\beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = h_1 \gamma\alpha u + h_2 \gamma\beta v + h_3 w + \psi_1 \gamma u + \psi_2 \alpha\beta\gamma v + \psi_3 \alpha w, \end{cases}$$

les f, g, h, φ, χ, ψ désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

4° Symétries ternaire, quaternaire et sénaire.

24. Les équations relatives à ces trois systèmes sont comprises dans les équations (21) et diffèrent, quand on passe d'un système à l'autre, par les valeurs des six quantités X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 qui ont, dans les trois genres de symétrie, les valeurs comprises dans le tableau suivant.

	SYMÉTRIE ternaire.	SYMÉTRIE quaternaire.	SYMÉTRIE sénaire.
X	$\beta^3 - 3\beta\gamma^2$	$(\beta^2 + \gamma^2)^2$	$\beta^6 - 15\beta^4\gamma^2 + 15\beta^2\gamma^4 - \gamma^6$
Y	$3\beta^2\gamma - \gamma^3$	$4\beta\gamma(\beta^2 - \gamma^2)$	$6\beta^5\gamma - 20\beta^3\gamma^3 + 6\beta\gamma^5$
X_1	$\beta^2 - \gamma^2$	$\beta^3 - 3\beta\gamma^2$	$\beta^5 - 10\beta^3\gamma^2 + 5\beta\gamma^4$
Y_1	$2\beta\gamma$	$3\beta^2\gamma - \gamma^3$	$5\beta^4\gamma - 10\beta^2\gamma^3 + \gamma^5$
X_2	β	$\beta^2 - \gamma^2$	$\beta^4 - 6\beta^2\gamma^2 + \gamma^4$
Y_2	γ	$2\beta\gamma$	$4\beta\gamma(\beta^2 - \gamma^2)$

En substituant, pour chacun des trois systèmes cristallins, les valeurs des six quantités données par ce tableau, on obtient les équations générales propres à représenter les vibrations de la lumière dans un cristal de ce système.

Nous examinerons actuellement ce que deviennent ces équations quand le cristal présente :

1° L'holoaxie hémisymétrique;
2° L'holoaxie centrée;
3° L'hémiaxie dichosymétrique;
4° L'hémiaxie hémisymétrique.

25. *Holoaxie hémisymétrique.* — Dans ce cas, le polyèdre moléculaire et l'assemblage présentent trois, quatre ou six axes de symétrie dirigés dans un plan perpendiculaire à l'axe principal de symétrie. Prenant un de ces axes pour axe des y, on voit que les équations (21)

ne doivent pas être altérées quand, sans changer l'axe des y positifs, on substitue aux axes positifs des x et des z leurs prolongements.

Ce changement de coordonnées entraîne les substitutions suivantes :

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & v, & -w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & \beta, & -\gamma \end{pmatrix}.$$

On voit d'ailleurs que ces substitutions ne changent pas X, X_1, X_2 et changent le signe de Y, Y_1, Y_2. En effet, en changeant le signe de γ, l'expression

$$(\beta + \gamma i)^m = X_m + Y_m i$$

devient

$$(\beta - \gamma i)^m = X_m - Y_m i.$$

Cela posé, on voit aisément que, pour que les substitutions dont il s'agit n'altèrent pas le système des équations (21), il faut que, par la substitution de $-\alpha$, $-Y$ à α, Y :

1° Les fonctions

$$f_1, f_3, \varphi_3, G_1, g_2, g_3, H_1, H_2$$

ne changent pas de valeur ;

2° Les fonctions

$$f_2, \varphi_2, g_1, G_2, G_3, h_1, H_2$$

changent de signe.

D'ailleurs, toute fonction entière de α, Y qui change de signe quand on y change le signe de ces variables, est de la forme

$$f\alpha + f'Y,$$

et toute fonction ne changeant pas, par la même substitution, est de la forme

$$f + f'\alpha Y,$$

f et f' désignant des fonctions entières de α^2, Y^2.

On en déduit définitivement que le système des équations (21) peut, dans le cas que nous considérons, s'écrire de la manière suivante :

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma^2 u = {} & f_1 u + f_2 \alpha(\beta v + \gamma w) + f_3(\beta w - \gamma v) \\
& + Y[f''_1 \alpha u + f'_2(\beta v + \gamma w) + f'_3 \alpha(\beta w - \gamma v)] \\
& + \varphi_2 \alpha(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3(X_1 w + Y_1 v) \\
& + Y[\varphi'_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi'_3 \alpha(X_1 w + Y_1 v)], \\
\sigma^2 v = {} & g_2 v - G_2 \alpha w + (g_1 \alpha\beta - G_1 \gamma) u \\
& + (g_3 \beta - G_3 \alpha\gamma)(\beta v + \gamma w) + (g_3 \gamma + G_3 \alpha\beta)(\beta w - \gamma v) \\
& + Y[g'_2 \alpha v - G'_2 w + (g'_1 \beta - G'_1 \alpha\gamma) u \\
& \qquad + (g'_3 \alpha\beta - G'_3 \gamma)(\beta v + \gamma w) + (g'_3 \alpha\gamma + G'_3 \beta)(\beta w - \gamma v)] \\
& + (h_1 \alpha X_1 + H_1 Y_1) u + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2 \alpha(X_2 w + Y_2 v) \\
& + Y[(h'_1 X_1 + H'_1 \alpha Y_1) u \\
& \qquad + h'_2 \alpha(X_2 v - Y_2 w) + H'_2(X_2 w + Y_2 v)], \\
\sigma^2 w = {} & g_2 w + G_2 \alpha v + (g_1 \alpha\gamma + G_1 \beta) u \\
& + (g_3 \gamma + G_3 \alpha\beta)(\beta v + \gamma w) - (g_3 \beta - G_3 \alpha\gamma)(\beta w - \gamma v) \\
& + Y[g'_2 \alpha w + G'_2 \alpha v + (g'_1 \gamma + G'_1 \alpha\beta) u \\
& \qquad + (g'_3 \alpha\gamma + G'_3 \beta)(\beta v + \gamma w) - (g'_3 \alpha\beta - G'_3 \gamma)(\beta w - \gamma v)] \\
& + (H_1 X_1 - h_1 \alpha Y_1) u + H_2 \alpha(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v) \\
& + Y[(H'_1 \alpha X_1 - h'_1 Y_1) u \\
& \qquad + H'_2(X_2 v - Y_2 w) - h'_2 \alpha(X_2 w + Y_2 v)],
\end{aligned}
\right.
$$

les fonctions indéterminées qui entrent dans ces équations étant des fonctions entières de

$$\alpha^2,\ \beta^2 + \gamma^2,\ X,\ Y^2.$$

26. *Holoaxie centrée.* — Les équations s'obtiennent en supprimant dans les précédentes les termes de degré impair par rapport à α, β, γ.

27. *Hémiaxie dichosymétrique.* — Supposons que le polyèdre moléculaire soit dénué de centre et possède, en commun avec l'assemblage, plusieurs plans de symétrie passant par l'axe principal ox. Si

l'on prend un de ces plans pour plan des xy, on voit que les équations (21) ne doivent pas être altérées quand on y change w en $-w$ et γ en $-\gamma$, ce qui substitue $-Y$, $-Y_1$, $-Y_2$ à Y, Y_1, Y_2.

On en déduit aisément que les fonctions

$$f_1,\ f_2,\ \varphi_2,\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ h_1,\ h_2$$

ne changent pas et que les fonctions

$$f_3,\ \varphi_3,\ G_1,\ G_2,\ G_3,\ H_1,\ H_2$$

changent de signe quand on y change le signe de Y.

Les premières sont donc des fonctions de Y^2, et les autres sont égales au produit de Y par des fonctions de Y^2. On parvient ainsi à mettre les équations (21) sous la forme :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1 u + f_2(\beta v + \gamma w) + f_3 Y(\beta w - \gamma v)\\
&\quad + \varphi_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3 Y(X_1 w + Y_1 v),\\
\sigma^2 v &= g_2 v - G_2 Y w + (g_1\beta - G_1 Y\gamma)u + (g_3\beta - G_3 Y\gamma)(\beta v + \gamma w)\\
&\quad + (g_3\gamma + G_3 Y\beta)(\beta w - \gamma v) + (h_1 X_1 + H_1 Y Y_1)u\\
&\quad + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2 Y(X_2 w + Y_2 v),\\
\sigma^2 w &= g_2 w + G_2 Y v + (g_1\gamma + G_1 Y\beta)u + (g_3\gamma + G_3 Y\beta)(\beta v + \gamma w)\\
&\quad - (g_3\beta - G_3 Y\gamma)(\beta w - \gamma v) + (H_1 Y X_1 - h_1 Y_1)u\\
&\quad + H_2 Y(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v),
\end{aligned}\right.$$

les fonctions renfermées dans ces équations dépendant de α, $\beta^2 + \gamma^2$, X, Y^2.

28. *Hémiaxie hémisymétrique.* — L'hémiaxie peut avoir lieu, soit par la suppression des axes binaires, soit par la réduction à moitié de l'ordre de l'axe principal.

Dans le premier cas, les équations auxiliaires sont les équations (21). Dans le second cas, elles coïncident avec celles qui correspondent à l'holoaxie du système caractérisé par un axe principal d'un ordre moitié moindre que celui que présente le système cristallin considéré.

Enfin, en supprimant les termes d'ordre impair dans les équations de l'hémiaxie hémisymétrique, on obtient les équations de l'*hémiaxie centrée.*

5° *Symétrie terquaternaire.*

29. On a, dans ce système, cinq cas à considérer :

1° Holoaxie hémisymétrique. . $[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ oC,\ oP]$;
2° Holoaxie centrée . . . . . . $[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ C,\ 3P^4,\ 6P^2]$;
3° Hémiaxie hémisymétrique. . $[3L^2,\ 4L^3,\ oC,\ oP]$;
4° Hémiaxie dichosymétrique. . $[3L^2,\ 4L^3,\ oC,\ 6P]$;
5° Hémiaxie centrée . . . . . . $[3L^2,\ 4L^3,\ C,\ 3P^2]$.

Nous allons examiner la forme des équations auxiliaires dans chacun de ces cas particuliers.

Observant d'abord que, dans chacun de ces cas, le polyèdre moléculaire et l'assemblage possèdent quatre axes ternaires, nous allons déterminer les conséquences qui résultent de l'existence de ces axes. Ces quatre axes sont dirigés, comme on l'a remarqué au n° 5, suivant les lignes qui dans un cube joignent les sommets opposés.

Nous prendrons pour axes de coordonnées les arêtes du cube dont les grandes diagonales sont parallèles aux quatre axes ternaires. Ces axes sont dirigés suivant les trois axes quaternaires de l'assemblage.

30. Considérons d'abord l'axe ternaire compris dans le trièdre déterminé par les parties positives des axes de coordonnées, et supposons que l'on fasse tourner le système de ces axes de 120 degrés autour de l'axe ternaire. Les équations (4) ne doivent pas être altérées par la substitution.

Or, cette rotation permute circulairement les directions des axes, de sorte que les nouveaux axes des x, y, z coïncident avec les anciens des y, z, x, si la rotation s'effectue dans un sens, et avec les anciens axes des z, x, y si elle s'effectue en sens inverse.

On a donc les deux substitutions

$$(32)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ v, & w, & u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \alpha \end{pmatrix};$$

$$(33)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ w, & u, & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \gamma, & \alpha, & \beta \end{pmatrix}.$$

qui ne doivent pas altérer les équations (4).

Désignons par un ou deux accents les transformées des F, G, H par les substitutions (32) ou (33). Ces substitutions transforment évidemment la première équation (4) dans les suivantes :

$$\sigma^2 v = F'_3 u + F'_1 v + F'_2 w,$$
$$\sigma^2 w = F''_2 u + F''_3 v + F''_1 w.$$

Donc, par suite de l'existence de l'axe ternaire, le système des équations (4) doit être de la forme

$$(34) \qquad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \sigma^2 v = F'_3 u + F'_1 v + F'_2 w, \\ \sigma^2 w = F''_2 u + F''_3 v + F''_1 w. \end{cases}$$

31. Considérons maintenant l'axe ternaire également incliné sur les parties positives des axes ox, oz et sur la partie négative de oy.

Dans ce cas, le système des équations (4) ne doit pas être altéré par la substitution

$$(35) \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -v, & -w, & u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\beta, & -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}.$$

Or, le même système étant inaltéré par la substitution (32) devra l'être par la suivante :

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & -v, & w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & -\beta, & \gamma \end{pmatrix}.$$

Par conséquent l'axe des z est un axe de symétrie binaire.

Ainsi, l'existence des deux axes de symétrie ternaires entraîne l'existence d'un axe de symétrie binaire, et inversement l'existence de cet axe binaire et d'un des axes ternaires entraîne l'existence du second axe ternaire.

On en conclut immédiatement que, avec les quatre axes ternaires disposés comme les quatre grandes diagonales d'un cube, existent nécessairement trois axes binaires dirigés suivant les arêtes de ce cube ; et

inversement, les trois axes binaires et un des axes ternaires entraînent les trois autres axes ternaires.

32. *Hémiaxie hémisymétrique* ($3L^2$, $4L^3$, oC, oP).

Cela posé, pour obtenir les équations auxiliaires de l'hémiaxie hémisymétrique, il suffira de prendre comme point de départ les équations de l'holoaxie hémisymétrique du système terbinaire (25), et d'y introduire les conditions établies au n° **30**. On obtient ainsi le système suivant :

$$(36)\begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w + \varphi_1 \alpha\beta\gamma u + \varphi_2 \gamma v + \varphi_3 \beta w, \\ \sigma^2 v = f'_3 \beta\alpha u + f'_1 v + f'_2 \beta\gamma w + \varphi'_3 \gamma u + \varphi'_1 \alpha\beta\gamma v + \varphi'_2 \alpha w, \\ \sigma^2 w = f''_2 \alpha\gamma u + f''_8 \gamma\beta v + f''_1 w + \varphi''_2 \beta u + \varphi''_3 \alpha v + \varphi''_1 \alpha\beta\gamma w, \end{cases}$$

où on dénote toujours par un ou deux accents ce que deviennent les fonctions de la première équation par les substitutions

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \gamma, & \alpha, & \beta \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que ces fonctions sont des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

33. *Hémiaxie dichosymétrique* ($3L^2$, $4L^3$, oC, 6P).

Le système cristallisé présente, dans le cas actuel, six plans de symétrie, partageant en deux parties égales les dièdres que forment deux à deux les plans coordonnés. Les axes de symétrie sont les mêmes que dans le cas précédent. Les équations sont donc comprises dans le système (36) : exprimons en outre la condition qu'entraîne le plan de symétrie bissecteur du dièdre droit compris entre les plans xoz, yoz.

Il est clair que, si l'on donne aux axes oy, oz des positions symétriques par rapport à ce plan de celles qu'ils occupent effectivement, on permute ces deux axes, de sorte qu'au changement d'axes dont il s'agit correspond la substitution

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ u, & w, & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \gamma, & \beta \end{pmatrix},$$

et cette substitution doit transformer en elles-mêmes les équations (36). On en conclut aisément que :

1° Les fonctions f_1, φ_1 sont des fonctions symétriques de β^2, γ^2, c'est-à-dire des fonctions de $\beta^2+\gamma^2$ et $\beta^2\gamma^2$.

2° L'on a les relations identiques

$$f_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2),$$
$$\varphi_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2).$$

Par conséquent les équations sont nécessairement de la forme

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}\sigma^2 u &= f_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\beta\gamma v\\ &\quad + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\alpha\gamma w + \varphi_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)\alpha\beta\gamma u\\ &\quad + \varphi_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\gamma v + \varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\beta w,\\ \sigma^2 v &= f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\beta\alpha u + f_1(\beta^2, \alpha^2+\gamma^2, \alpha^2\gamma^2)v\\ &\quad + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\beta\gamma w + \varphi_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\gamma u\\ &\quad + \varphi_1(\beta^2, \alpha^2+\gamma^2, \alpha^2\gamma^2)\alpha\beta\gamma v + \varphi_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\alpha w,\\ \sigma^2 w &= f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\alpha\gamma u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\beta\gamma v\\ &\quad + f_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)w + \varphi_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\beta u\\ &\quad + \varphi_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\alpha v + \varphi_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)\alpha\beta\gamma w.\end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces équations jouissent des propriétés analytiques qui correspondent aux six plans de symétrie que possède le système. De sorte que les équations (37) constituent les équations générales relatives à l'hémiaxie dichosymétrique du système terquaternaire.

34. *Hémiaxie centrée.* — Les équations sont les équations (36), moins les termes d'ordre impair, c'est-à-dire les suivantes :

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}\sigma^2 u &= f_1 u + f_2\alpha\beta v + f_3\alpha\gamma . w,\\ \sigma^2 v &= f'_3\beta\alpha u + f'_1 v + f'_2\beta\gamma . w,\\ \sigma^2 w &= f''_2\gamma\alpha . u + f''_3\gamma\beta v + f''_1 . w.\end{aligned}\right.$$

35. *Holoaxie hémisymétrique* ($3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, o C, o P).

Il est clair que les équations qu'il s'agit d'obtenir sont comprises

dans les formules (36). Il suffit d'exprimer dans celles-ci que le système possède un axe quaternaire ; en effet, l'existence des axes ternaires entraîne l'existence des deux autres axes quaternaires.

D'ailleurs, on sait que les axes binaires sont une conséquence nécessaire des axes ternaires et quaternaires.

Il suffit donc d'exprimer que l'axe des x est un axe quaternaire.

Par suite, les équations ne doivent pas être altérées, si on fait tourner solidairement les axes oy et oz de 90 degrés dans leur plan. Or, ce changement d'axes introduit la substitution

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ u, & -w, & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & -\gamma, & \beta \end{pmatrix}.$$

Cette substitution ne devant pas altérer les équations (36), on voit que :

1° La fonction f_1 est une fonction symétrique de β^2 et γ^2.

2° La fonction φ_1 est une fonction alternée des mêmes variables, et est par conséquent égale au produit de $\beta^2 - \gamma^2$ par une fonction symétrique de β^2, γ^2.

3° L'on a enfin les relations

$$\begin{aligned} f_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) &= f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2), \\ \varphi_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) &= -\varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2). \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système des équations auxiliaires sous la forme :

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma^2 u = {} & f_1(\alpha^2, \beta^2 + \gamma^2, \beta^2\gamma^2)\, u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\, \alpha\beta v \\ & + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\, \alpha\gamma w + \varphi_1(\alpha^2, \beta^2 + \gamma^2, \beta^2\gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2)\, \alpha\beta\gamma u \\ & + \varphi_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\, \gamma v - \varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\, \beta w, \\ \sigma^2 v = {} & f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\, \beta\alpha u + f_1(\beta^2, \gamma^2 + \alpha^2, \gamma^2\alpha^2)\, v \\ & + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\, \beta\gamma w - \varphi_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\, \gamma u \\ & + \varphi_1(\beta^2, \gamma + \alpha^2, \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2 - \alpha^2)\, \alpha\beta\gamma v + \varphi_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\, \alpha w, \\ \sigma^2 w = {} & f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\, \gamma\alpha u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\, \gamma\beta v \\ & + f_1(\gamma^2, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^2\beta^2)\, w + \varphi_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\, \beta u \\ & - \varphi_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\, \alpha v + \varphi_1(\gamma^2, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^2\beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)\, \alpha\beta\gamma w \end{aligned} \right.$$

36. *Holoaxie centrée* ($3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2$).

Les équations se déduisent des précédentes par la suppression des termes d'ordre impair

$$(40)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\alpha\beta v \\ \qquad + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\alpha\gamma w, \\ \sigma^2 v = f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\beta\alpha u + f_1(\beta^2, \gamma^2+\alpha^2, \gamma^2\alpha^2)v \\ \qquad + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\gamma\alpha u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\gamma\beta v \\ \qquad + f_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)w. \end{cases}$$

SUR LA FORME A CINQ INDÉTERMINÉES

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 ;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

Nous reproduisons, sans y rien changer, la Note ci-après, insérée dans les *Comptes rendus* de notre Académie (séance du 26 mars 1866). Le lecteur suppléera à la démonstration, qu'il nous paraît inutile d'ajouter pour le moment.

« La fonction numérique qui exprime la somme des puissances de degré μ des diviseurs d'un entier quelconque n, fonction que j'ai coutume de désigner par $\zeta_\mu(n)$, se présente utilement dans la recherche du nombre des représentations de n par certaines formes quadratiques. Mais il n'y a guère que le cas d'un indice μ impair qui ait donné lieu jusqu'ici à de belles applications. Le cas de μ pair a été peu étudié. On me saura donc gré peut-être d'indiquer un exemple où devront être employées à la fois la fonction $\zeta_0(n)$ ou $\zeta(n)$ qui exprime le nombre des diviseurs de n et la fonction $\zeta_2(n)$ qui exprime la somme des carrés de ces diviseurs. Il s'agit cette fois d'une forme à cinq variables, savoir

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 .$$

Comme cette forme est indéfinie, je limite les valeurs des indéterminées en exigeant que x_1, x_2, x_4, x_5 soient des entiers positifs; quant à l'entier x_3, il sera positif ou égal à zéro. Cela posé, on demande une expression simple du nombre N des représentations de n sous la forme citée. En d'autres termes, on demande une expression simple du nombre N des solutions que l'équation indéterminée

$$n = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5$$

comporte sous la condition de

$$x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5 > 0, \quad x_3 \geqq 0.$$

Or, je réponds à cette question par la formule suivante,

$$N = \zeta_2(n) - n\zeta(n),$$

qui ne laisse, ce me semble, rien à désirer. Pour $n = 1$, comme la valeur commune de $\zeta(1)$ et $\zeta_2(1)$ est l'unité, cette formule donne $N = 0$, résultat évidemment exact. Dans tout autre cas, N est > 0. Quand n est premier, on a

$$\zeta(n) = 2, \quad \zeta_2(n) = n^2 + 1;$$

ainsi alors

$$N = (n-1)^2. »$$

Expériences et considérations théoriques sur une nouvelle pompe conique sans piston ni soupape, dont le moteur agit de bas en haut;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Cette pompe se compose de deux tuyaux, l'un conique, l'autre cylindrique, ayant le même axe, ouverts à leurs extrémités et soudés ensemble, le tuyau cylindrique étant au-dessus et la plus grande section du tuyau conique étant à l'extrémité inférieure du système. L'eau élevée est reçue dans un vase annulaire fixe, au milieu duquel le sommet du tuyau cylindrique a la liberté de passer, toutefois avec le moins de jeu possible. Ce tuyau est suspendu à une des extrémités d'un balancier par une anse à laquelle est attachée une corde ou une chaîne, et cette anse est soudée à l'intérieur, afin de ne pas gêner le mouvement du tuyau dans le milieu du vase annulaire faisant fonction de guide.

Dans le premier modèle essayé en grand, le tuyau cylindrique et le tuyau conique ont chacun $1^{m},90$ de long. La plus grande section du tuyau conique a 25 centimètres de diamètre. Le tuyau cylindrique a un diamètre de $9\frac{3}{4}$ centimètres. Le tuyau conique est en zinc n° 14, le tuyau cylindrique est en zinc n° 13. Il n'y a pas de guide inférieur.

Pour faire fonctionner l'appareil ayant pour but, par exemple, d'élever l'eau d'un puits dont le niveau, entretenu par un courant souterrain, serait toujours à une hauteur suffisante au-dessus du fond, il suffit de soulever alternativement le tuyau en s'arrêtant de manière qu'il soit sensiblement en repos à l'époque du versement supérieur. On le laisse ensuite retomber par son propre poids, et ainsi de suite indéfiniment.

Le jet qui sort au sommet, à chaque période, et dont la hauteur dépend de la force avec laquelle on met le tuyau en mouvement, sort

en forme de *champignon*, de sorte qu'il ne peut passer que très-peu d'eau entre le tuyau fixe du réservoir annulaire et le tuyau mobile; on verra plus loin comment on peut augmenter la divergence de cette espèce de *champignon*. Pour un appareil de ces dimensions, élevant l'eau à $1^{m},50$ au moins au-dessus du niveau de la citerne, il y a trente périodes par minute, chaque période comprenant une ascension et une descente du système. Quand on élevait l'eau à $1^{m},20$, il y avait ordinairement vingt-quatre périodes par minute.

Il est à remarquer que si l'on fait marcher le tuyau trop vite ou trop lentement, on ne sent que très-peu de résistance, mais aussi il ne sort plus d'eau par le sommet. Pour saisir le mouvement convenable il faut, comme on l'expliquera plus loin, s'abandonner au mouvement naturel de l'homme agissant sur le levier d'une pompe ordinaire et ne faire aucun effort en se relevant. Les courts instants de repos qui permettent à l'eau de se verser quand une hauteur constante est atteinte par le tuyau sont très-commodes. Les repos de ce genre sont d'ailleurs, comme on sait, recommandés en général pour l'emploi de la force de l'homme. Aussi il y a des ouvriers qui saisissent facilement le genre de mouvement nécessaire pour que l'appareil élève une quantité d'eau convenable, par la raison même qu'ils s'abandonnent à un mouvement naturel; il y a au contraire des savants qui n'ont pas facilement saisi le mouvement nécessaire.

La quantité d'eau élevée paraît, comme on verra plus loin, au moins égale à celle que fournit une bonne pompe ordinaire; toutes choses égales d'ailleurs, l'avantage resterait cependant à celle-ci, qui n'a aucune pièce susceptible de se déranger, et coûte en définitive beaucoup moins cher, comme tout le monde peut en faire le calcul d'après le prix connu des matériaux.

Avec le même appareil, la hauteur du versement de l'eau au-dessus du niveau de la citerne a pu être considérablement augmentée, elle s'est élevée jusqu'à $2^{m},30$. Mais pour ces diamètres la colonne liquide est alors trop divisée par suite des mouvements de l'air, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour les hauteurs analogues à celles de $1^{m},50$. Dans ce dernier cas, si l'on règle le jeu de manière que l'eau arrive au sommet sans sortir, on voit que la surface ascendante n'est pas même en entier recouverte de bouillons. On peut faire marcher l'ap-

pareil sans effort avec une seule main pour ces dimensions; une jeune fille de quinze ans a même pu le faire marcher sans fatigue.

Il est essentiel de remarquer, quant au principe, que l'appareil n'agit point en descendant comme le fait une *canne hydraulique*. Lorsqu'on veut réunir les deux effets, comme cela se peut dans un très-petit modèle, il paraît pour ces dimensions difficile, sinon impossible, de mettre l'appareil en train au moyen de la force de l'homme.

Quand on soulève le tuyau une première fois, il tend à se faire, entre la paroi conique et l'eau qu'elle contient, une sorte de *vide conique annulaire*, d'où résulte une descente du niveau intérieur au-dessous du niveau extérieur de l'eau dans le puits, et par suite une oscillation ascendante à la période suivante; on saisit pour agir le moment où l'on sent de la résistance, et ainsi de suite. A la seconde période ou à la troisième, l'eau sort par le sommet et l'appareil est en train. On est instinctivement averti, par le bruit de l'eau tombant dans la bâche annulaire, qu'il faut laisser retomber de lui-même le tuyau qui doit entraîner le bras de levier sur lequel on agit alternativement. La course du tuyau est assez petite par rapport à l'élévation de l'eau.

Il est intéressant de se rendre compte du mode d'action de cette tendance au *vide conique annulaire* sur lequel repose le jeu de cet appareil. Le tuyau en se relevant rencontre au-dessus de lui la pression de l'eau ambiante. Il éprouve un frottement de la part de cette eau dans son mouvement. Quant au frottement à l'intérieur, il est sans doute en partie employé à l'élévation de l'eau. L'angle de l'entonnoir est trop aigu pour que la *résistance du milieu* soit bien sensible. L'orifice inférieur ayant un grand diamètre par rapport au tuyau cylindrique, il ne paraît pas que la perte de force vive en ce point soit importante par rapport à celle qui résulte du versement au sommet du tuyau cylindrique, même quand ce versement se fait à une hauteur maximum de 2 décimètres environ au-dessus de ce sommet.

Quand l'eau ascensionnelle pénètre dans le tuyau cylindrique, il est difficile d'admettre, au delà de certaines limites, que le *vide conique annulaire* puisse être prévenu autrement que par suite de l'entrée de l'eau à l'extrémité inférieure du système. L'appareil peut donc alors être considéré comme *une véritable pompe aspirante*, et c'est un genre d'effet entièrement nouveau. Aussi, quand le moteur

cesse d'agir sur l'autre extrémité du balancier, la force vive quelconque du tuyau en mouvement ne permet pas à ce tuyau de continuer à s'élever de la même manière que dans les circonstances où le jeu n'est pas bien réglé. Elle est employée à produire une aspiration, d'où résulte une augmentation ou un mode d'*entretien* quelconque de la quantité de force vive de la colonne liquide ascendante.

Pour de plus grands diamètres, il y aura moins de frottement, moins de chances de bouillonnement, l'effet utile sera plus grand, et l'eau pourra s'élever plus haut avec avantage.

Ce système, quand l'axe est rectiligne et vertical, a deux inconvénients : 1° l'eau doit être à une assez grande profondeur au-dessous du niveau d'où elle doit être épuisée, c'est-à-dire que l'extrémité inférieure du tuyau ne doit pas rencontrer le fond, ni même s'en approcher assez pour qu'il en résulte un étranglement annulaire trop sensible ; 2° il faut un certain apprentissage pour mettre l'appareil en train.

Ces deux inconvénients peuvent être évités si le tuyau formé des deux parties cylindrique et conique, au lieu d'avoir un axe rectiligne, a un axe courbé en arc de cercle mobile autour d'un point fixe.

Dans ce cas, le tuyau dont il s'agit, au lieu d'avoir des sections circulaires, pourra avoir des sections rectangulaires dont les grands côtés seront perpendiculaires au plan de rotation alternative. Cela permettra d'obtenir de beaucoup plus grandes sections. On conçoit cependant que pour de petites profondeurs les côtés des sections rectangulaires parallèles au plan de rotation auront des limites assez restreintes.

Cette forme générale du système a permis, au moins pour un petit modèle, d'obtenir immédiatement le mouvement oscillatoire voulu sans aucun apprentissage. Une masse de plomb disposée sur le tuyau courbe en faisait une sorte de véritable pendule, qui réglait nécessairement le mouvement à saisir.

On conçoit que, même en conservant la première forme rectiligne de l'axe du tuyau, on peut, en le coordonnant avec une sorte de pendule attaché à l'axe du balancier, obtenir tout naturellement le mouvement alternatif voulu, sans apprentissage. Mais dans l'un et l'autre cas ce mouvement de pendule, quelque facile qu'il soit de le régler, en fixant sa masse de plomb à une hauteur convenable, offre l'inconvénient suivant. Il faut que le tube ne puisse plus s'arrêter pendant un

temps sensible, qui était celui du versement dans la première manœuvre décrite ci-dessus. Il est donc nécessaire alors que le sommet du tube s'élève plus haut que cela n'est indispensable; de sorte que l'eau se verse sensiblement plus haut qu'on ne le veut pendant la fin de l'ascension du tube ou pendant le commencement de sa descente. Quant aux pompes en arc de cercle, il faut tenir compte de la manière dont l'air peut être enveloppé par la colonne ascendante.

Il vaut donc mieux en principe se servir du premier mode de manœuvre décrit ci-dessus, quand les circonstances le permettent et quand on peut facilement saisir le mouvement de mise en train.

Ce mouvement a été facilement saisi pour une pompe employant la force de deux hommes. Dans ce cas, l'axe rectiligne du tuyau était incliné; les deux hommes agissaient par un système de manivelle grossièrement disposé avec des cordes, l'avantage de ce système consistant principalement dans sa rusticité.

Quand on a voulu agir sur une pompe verticale en planches, d'assez grande section pour employer une douzaine d'hommes, on a trouvé plus de difficultés à leur faire saisir tous ensemble le mouvement. On y est parvenu cependant; mais il est douteux que pour ces grandes sections qui étaient des carrés, on doive recommander l'usage de ce système, quand d'ailleurs l'axe est vertical; d'autant plus que si la profondeur d'eau à puiser n'est pas grande, il en résulte bientôt l'espèce d'étranglement annulaire occasionné par le fond de l'eau, ainsi que je l'ai signalé ci-dessus. Je vais donc me borner provisoirement à donner une idée des observations faites sur les appareils de petites sections élevant l'eau à des hauteurs de $1^{m},50$ à 3 mètres, en tenant compte des assertions d'un ouvrier intelligent, relativement aux détails de sa manœuvre.

C'est au commencement de chaque période que l'effort du moteur doit principalement agir. L'homme fait alors ce que les ouvriers appellent donner un coup *sec*. Cela ne signifie pas, dans leur langage, un coup brusque, mais un effort qui se fait vivement en appuyant sur le bras de levier opposé. Cela ne signifie pas non plus que cet effort doive seulement se faire pendant une faible partie de la course. L'ouvrier avait l'habitude de le faire sur plus de la moitié de cette course, soit sur les deux tiers environ, ce qu'il sera d'ailleurs facile de mieux pré-

ciser quand on se servira de ce système. On ne veut pas dire non plus qu'il ne doive pas se faire d'effort à la fin de la course, mais que cet effort doit être plus modéré, et aller, pour ainsi dire, ce que les ouvriers appellent *en mourant*. C'est-à-dire que l'homme, appuyant d'abord vivement sur le bras du levier, doit s'abandonner ensuite à son mouvement naturel jusqu'à la fin de chaque course ascensionnelle du tuyau mobile vertical, époque à laquelle il a un instant de repos instinctif, et est averti d'ailleurs, par le bruit de l'eau élevée qui se verse, du moment où il doit laisser retomber ce tuyau mobile vertical après ce versement.

Mais il ne faut pas qu'il abandonne le bras de levier, ni encore bien moins qu'il veuille faire un effort en sens contraire du premier. Le tuyau mobile devant retomber sans être aidé par l'homme, et celui-ci pouvant avoir une distraction, il faut recommander de poser la tête de manière à ne pas s'exposer à y recevoir un coup du bras de levier, à l'époque où ce dernier, non-seulement serait brusquement relevé par le poids du tuyau (plus ou moins aidé par la pression de l'eau du puits sur la portion conique qui se vide en partie à son intérieur, en un mot par l'effet de l'oscillation descendante), mais serait imprudemment accéléré par l'effort intempestif de l'ouvrier. Ainsi il est bien entendu que celui-ci ne doit pas faire d'effort pendant que le tuyau mobile redescend, et qu'il ne doit à aucune époque abandonner le bras de levier, s'il ne veut pas que la machine cesse d'être amorcée.

Quant à la raison pour laquelle son effort doit diminuer à la fin de l'ascension du tuyau mobile, il est facile de s'en rendre compte. A cette époque, le système achève de se remplir d'eau ascensionnelle ayant la propriété de pouvoir pousser le tuyau de bas en haut sous la partie conique d'autant plus que celui-ci n'est plus retardé comme il tendait à l'être d'abord en vertu de la pression de l'eau du puits qui faisait sentir son action à l'extérieur sur la partie conique, à cause de la baisse de l'eau à son intérieur. Or, à l'époque dont il s'agit, cet intérieur est rempli d'eau en mouvement et qui, en vertu même de ce mouvement acquis de bas en haut, tend à passer en quelque sorte *à la filière* de la partie conique dans la partie cylindrique. On conçoit d'après cela que si l'on fait monter le tuyau mobile trop haut par un effort intempestif, c'est une raison pour qu'il cesse d'être amorcé, puisqu'il doit achever

sa course ascensionnelle, en utilisant pour l'achever la force vive de l'ensemble du système.

Cependant il faut tenir compte de ce que l'ouvrier ayant nécessairement à la longue quelques distractions, cette ascension trop grande du tuyau aura quelquefois lieu. On en sera quitte pour amorcer de nouveau l'appareil, ce qui se fera ordinairement en trois périodes.

Pour éviter le jaillissement en dehors du réservoir annulaire destiné à recevoir l'eau élevée, on a disposé au-dessus une sorte de toit conique renversé fixe, afin de faire d'ailleurs diverger la colonne liquide. Mais, d'après ce qui vient d'être dit, quelques précautions sont nécessaires à cause de l'inconvénient résultant de ce que le tuyau mobile montera quelquefois plus haut qu'on ne veut. Il m'a paru convenable, d'après cela, d'attacher au sommet du tuyau mobile une sorte de cône renversé, ayant pour but d'empêcher l'eau de retomber en partie dans le tuyau d'où elle sort. On peut d'ailleurs diminuer la résistance de l'eau à la déviation qui en résulte, au moyen de plusieurs surfaces coniques concentriques.

Voici quelles sont les dimensions de l'appareil sur lequel on a fait le plus d'expériences. Le tuyau cylindrique a 13 décimètres de diamètre et 2 mètres de long. La partie évasée qui y est soudée a 36 centimètres de diamètre à son extrémité inférieure, et $2^{m},90$ de long. L'ensemble de ces deux tuyaux est en zinc n° 14. Mais la partie évasée a été renforcée par quatre cercles bordés de fils de fer, l'expérience ayant appris qu'une pompe de diamètres moindres, décrite ci-dessus, avait été, après un assez long usage il est vrai, écrasée sur une certaine longueur de la partie évasée. A l'extrémité inférieure de ces divers modèles, on avait d'ailleurs roulé un fil de fer pour en augmenter la solidité. Cet appareil mobile pèse $22^{kil},7$; mais comme les cercles en zinc disposés sur la partie conique forment de véritables petits flotteurs à cause de la manière dont ils sont attachés, l'ensemble ne se trouva point assez pesant pour redescendre de lui-même. On souda extérieurement à l'extrémité inférieure une feuille de plomb pesant $5^{kil},25$, et qui lui donna le poids suffisant pour une marche régulière. La forme provisoire des cercles extérieurs précités est une petite cause de résistance dans l'eau du puits; mais la course du tuyau n'étant que d'une cinquantaine de centimètres, et chaque ascension durant environ une

seconde, le choc de ces cercles contre l'eau extérieure ne se fait qu'avec d'assez petites vitesses.

Quant au bout de tuyau cylindrique fixe soudé au milieu du réservoir annulaire, et servant de guide au tuyau cylindrique mobile au sommet de celui-ci, son diamètre est de 15 centimètres, et sa longueur de 80 centimètres. Il y a bien assez de jeu entre ce tuyau fixe et ce tuyau mobile, même pour un essai très-rustique, la corde attachée au sommet du tube mobile s'enroulant d'ailleurs alternativement sur un arc de cercle disposé à l'une des extrémités du levier. Je n'ai pas en ce moment ce modèle sous les yeux, mais l'ouvrier qui l'a construit en a conservé les dimensions et les poids.

Les diamètres dont je viens de parler en dernier lieu sont un peu trop grands pour un appareil manœuvré par un seul homme, élevant l'eau à des hauteurs de 2 à 3 mètres. L'ouvrier qui s'en est servi pense que pour une élévation d'environ $2^{m},20$ les sections de la pompe mue par un homme doivent être moyennes entre celles de deux des modèles employés, l'un ayant un tuyau cylindrique de 13 centimètres, et le diamètre du tuyau cylindrique de l'autre étant de $9\frac{3}{4}$ centimètres.

Des expériences sur celle dont le tuyau cylindrique était de 13 centimètres de diamètre ont été faites pendant que j'étais en voyage. Les résultats de ces expériences furent malheureusement égarés avant mon retour; mais on m'assure qu'ils furent comparés à ceux d'une pompe ordinaire élevant l'eau précisément dans les mêmes conditions d'un puits très-voisin de celui sur lequel on opérait, et que, dans un même temps, ma pompe à tube mobile éleva plus d'eau que la pompe ordinaire, quoique celle-ci fût d'assez grandes dimensions. Ne l'ayant pas vérifié par moi-même, je ne mentionne ce résultat que pour valoir ce que de raison. On sait d'ailleurs combien la force de l'homme est variable et combien il peut y avoir de doute sur les résultats ainsi obtenus en eau élevée, quand on ne mesure pas les efforts du moteur au moyen de dynamomètres.

Mais il suffit que les quantités d'eau élevée aient paru satisfaisantes, pour que la rusticité de ce système mérite de fixer l'attention, notamment pour l'élévation des liquides imparfaits, tels que les purins de fumier. Ainsi on a remarqué que la pompe dont il s'agit élevait beaucoup de vase du fond d'un puits où elle était essayée.

Il est intéressant de donner une idée de la théorie de ce système. Quoiqu'il fût extrêmement délicat d'en donner une théorie complète, il est utile de fixer les idées sur les limites des dimensions indispensables pour chaque circonstance. Il faut d'abord tenir compte de ce que, si la hauteur à laquelle on veut élever l'eau était trop grande par rapport au diamètre de la partie cylindrique, il en résulterait des bouillonnements qui diminueraient l'effet utile.

Il faut aussi tenir compte de mes expériences plus générales sur les oscillations de l'eau dans les tubes verticaux. Quoique le cas ne soit pas tout à fait le même, l'effet de la force de l'homme pouvant être très-différent de celui de l'eau d'un réservoir sur une des extrémités d'un tuyau de conduite fixe, mes premières recherches publiées dans le tome III, 1re série, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1838, jetteront cependant beaucoup de jour sur ce sujet.

Ainsi, il en résulte que plus on veut élever l'eau à une grande hauteur, plus les diamètres du système doivent être augmentés si l'on veut conserver un rapport donné entre le travail résistant en frottement et le travail moteur. Il est d'ailleurs évident que si le diamètre de la partie cylindrique est augmenté, celui de l'extrémité inférieure de la partie conique doit être augmenté sensiblement dans le même rapport. Si, par exemple, le premier est doublé, le dernier doit être également doublé. On peut admettre, au moins provisoirement, dans la pratique, que pour une élévation double tous les diamètres doivent être doublés.

Cela suffit pour montrer que ce système ne peut élever l'eau qu'à des hauteurs médiocres, du moins s'il est manœuvré par un seul homme; et que si l'on veut s'en servir pour des hauteurs dépassant certaines limites, il vaudra mieux le faire par étages. On sait d'ailleurs combien, pour certaines circonstances, par exemple pour l'élévation des acides, on tiendrait à avoir une pompe sans piston ni soupape.

Dans le tome XII de la 1re série du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, j'ai montré comment j'avais transformé moi-même mon moteur hydraulique à flotteur oscillant en pompe sans piston ni soupape, en faisant agir dans diverses expériences le moteur sur le flotteur lui-même. Dans cette dernière circonstance, le mouvement est facile à saisir sans aucun apprentissage, parce qu'on est tout naturellement obligé de se soumettre aux durées des oscillations d'une longue

colonne liquide. Il y aura donc lieu de revenir aussi sur ce système pour l'étude de l'élévation des acides. Mais on ne pourra s'en servir aussi que pour des élévations assez limitées, à moins qu'on ne dispose des appareils étagés.

Celui qui est l'objet de cette Note coûtera en général beaucoup moins cher que celui que je rappelle. Il est d'ailleurs facile de voir que dans la pompe conique, la durée de chaque période doit être à peu près proportionnelle à la racine carrée de la hauteur à laquelle on veut élever l'eau, si l'on adopte la disposition rectiligne verticale, toutes proportions convenablement gardées.

Il est intéressant d'étudier plus spécialement la manière dont l'eau se comporte dans l'intérieur et à la sortie de la partie évasée. Quand l'eau entre à l'extrémité inférieure, elle rencontre des parois vives, comme dans un ajutage d'une forme particulière étudiée par Borda; mais la perte de force vive qui en résulte est bien atténuée par la diminution des vitesses résultant de l'évasement, le plus grand diamètre de celui-ci étant beaucoup plus grand que celui de sa partie cylindrique.

Quand l'eau sort dans l'oscillation descendante, le tuyau redescend en enveloppant plus ou moins, en poursuivant, si l'on peut s'exprimer ainsi, à son extrémité inférieure, le liquide qui en sort. La grandeur du diamètre inférieur rend d'ailleurs, sauf les considérations qui vont suivre, insignifiante la perte de force vive en ce point.

Je veux dire que la difficulté consiste bien plutôt à éviter les pertes de force vive provenant de ce que, dans sa descente, l'eau s'évase graduellement, il est vrai, dans la partie conique, mais enfin s'évase sans qu'il soit possible probablement d'éviter complétement la perte de force vive qui se manifeste plus ou moins dans les ajutages divergents.

Il est donc prudent, en général, de ne pas choisir un angle plus ouvert que celui de l'ajutage divergent de Venture, quand les circonstances le permettent, et même de choisir un angle notablement plus aigu quand le puits est assez profond pour qu'on puisse, sans inconvénient, augmenter la longueur de la partie conique en conservant le même rapport entre les diamètres de ses deux extrémités, si ce rapport est celui que l'usage fait en définitive choisir comme le plus convenable.

Voici quelles tentatives j'ai faites pour déterminer provisoirement, autant que possible, l'angle dont il s'agit. Daniel Bernoulli a calculé les durées des oscillations de l'eau dans un tube vertical conique ouvert à ses deux extrémités, et plongé en partie dans l'eau d'un réservoir : il a trouvé que dans certaines limites le frottement influait peu sur ces durées.

Or j'ai trouvé que dans un tuyau de $1^{m},16$ de long, de $13\frac{1}{2}$ centimètres de diamètre supérieur, et de 25 centimètres de diamètre inférieur, la durée de chaque oscillation diffère peu de la durée calculée d'après la formule de Bernoulli. Mais quand on réduit le diamètre supérieur à $9\frac{1}{2}$ centimètres, les durées des oscillations ne diminuent pas autant, par suite de la diminution de ce diamètre, que le calcul l'indique.

Dans ce cas, le tuyau ne *coule donc pas plein;* c'est-à-dire que le mouvement latéral ne se propage pas assez complétement jusqu'aux parois dans les oscillations descendantes, et que les choses se passent pour ainsi dire, quant aux durées des oscillations, comme si ces parois étaient moins ouvertes par le bas.

Je sais bien que dans l'un et l'autre cas les tourbillons provenant de la communication latérale du mouvement des liquides rendent la question très-délicate; aussi, j'ai seulement voulu donner une idée d'un moyen d'étude qui m'a paru intéressant. Les essais directs du genre de ceux qui ont été faits pour les modèles de pompes coniques déjà employés, et qui pourront être multipliés, offrent évidemment le moyen le plus sûr d'éclaircir la question d'une manière plus complétement pratique. J'ajouterai seulement que la partie conique doit toujours être plongée dans l'eau à épuiser, si l'on veut que l'appareil marche le plus convenablement possible, cette partie devant se soulever en tendant à faire une sorte de vide entre elle et l'eau qui monte au-dessous du niveau de l'eau dans le puits. Il vaut même mieux que le sommet de cette partie conique ne s'élève pas tout à fait jusqu'à la hauteur de ce niveau.

Quant à un essai d'assimilation entre les phénomènes du genre des colonnes oscillantes dont il s'agit, et ceux des colonnes liquides oscillantes dans des tuyaux de conduite débouchant dans des réservoirs, j'ai déjà donné ci-dessus une idée de l'utilité de ces considérations;

mais il est intéressant de faire pressentir la possibilité de s'en servir ultérieurement quand on connaîtra mieux la quantité de travail employé par l'ouvrier et ses variations, afin de déterminer par le calcul les dimensions les plus convenables pour le maximum d'effet, étant donnée la hauteur du versement.

On conçoit, en effet, que si la théorie donne des moyens pour déterminer, dans un appareil à colonne liquide oscillante et à tuyaux fixes, le rapport le plus convenable entre la masse d'eau qui doit être élevée à chaque oscillation, et le volume du tuyau vertical alternativement abandonné par la colonne liquide partant du repos, cela jettera beaucoup de jour sur cette question délicate, surtout si l'on parvient facilement à faire fonctionner la pompe conique dont il s'agit, au moyen d'une machine à vapeur dont on pourra varier la puissance. J'ai seulement voulu par cette indication montrer comment des considérations, qui au premier aperçu semblent étrangères à la question, peuvent y être utilement appliquées.

Quoique les résultats des expériences les plus essentielles sur l'effet utile aient été égarés en mon absence, on peut jusqu'à un certain point s'en former une idée approximative au moyen d'un résultat que j'ai conservé, et qui est relatif au modèle dont le tuyau cylindrique a $9\frac{3}{4}$ centimètres de diamètre. L'eau venait à $2^{m},16$ au-dessus du niveau de l'eau dans le puits; on élevait au moins 120 litres d'eau par minute. Mais ce modèle était, comme je l'ai dit, trop petit pour bien utiliser la force d'un homme, tandis que l'autre, dont le tuyau cylindrique avait 13 centimètres de diamètre, était trop grand. Le premier jetait donc nécessairement l'eau trop haut quand il était manœuvré par un homme : il ne serait donc sans doute pas juste de multiplier l'effet obtenu par le rapport du plus grand de ces diamètres au plus petit, puisque d'ailleurs l'homme était fatigué par l'emploi du plus grand; mais il paraît qu'on pourrait au moins proposer de prendre une moyenne. Je ne veux d'ailleurs que fixer mieux les idées sur ce genre d'effets, que je me propose d'étudier d'une manière plus complète assez prochainement.

Si, en principe, il est bon d'éviter de jeter l'eau à plus de 2 décimètres au-dessus du sommet du tube, ce qui fait d'ailleurs une hauteur moyenne de versement beaucoup moindre, il est intéressant de remar-

quer que si cet appareil, pour un tube moins haut, est manœuvré de manière à faire principalement agir le moteur de haut en bas, on peut s'en servir, comme l'a remarqué un savant américain (qui n'avait peut-être pas connaissance de mes recherches sur ce sujet, puisqu'il ne les cite pas), pour obtenir des jets d'eau alternatifs, susceptibles d'être utilisés en horticulture pour l'arrosement des arbustes.

Mais ce genre d'effet n'est pas celui qui est l'objet essentiel sur lequel je dois spécialement attirer l'attention dans cette Note. Tout le monde savait que si un entonnoir frappe l'eau d'un réservoir de haut en bas, il en résulte un jet d'eau en vertu du principe de la canne hydraulique. Mais si l'on tire cet entonnoir de bas en haut, la portion conique étant plongée et la partie cylindrique étant hors de l'eau en tout ou en partie, il en résulte une série de phénomènes intéressants, notamment dans les circonstances où l'on veut s'en servir pour élever à des hauteurs de $1^m,50$ à 3 mètres de l'eau ou des liquides imparfaits tels que des purins de fumier, ou des acides. Pour d'assez grandes hauteurs il faudrait des appareils étagés.

Il y a un moyen de diminuer un peu les effets du bouillonnement de l'air signalés pour certaines hauteurs de versement. Par exemple, pour le premier modèle décrit ci-dessus, on a diminué l'angle de convergence du tuyau conique; mais cela n'a pas beaucoup diminué la division de l'eau, et il a fallu augmenter de moitié en sus environ la longueur de ce tuyau conique pour retrouver à sa partie inférieure une section analogue à celle de la première série d'expériences. Cela n'a pas d'inconvénient quand le puits est assez profond au-dessous du niveau d'où l'eau doit être puisée. Pour de plus grands diamètres, l'eau est moins facilement divisée, à hauteur égale de versement.

Quant à l'application du système à l'élévation des purins de fumiers, on peut demander si, le meilleur purin étant au fond de la fosse, cet appareil est convenablement disposé pour l'extraire.

J'ai déjà dit qu'il avait extrait de la vase du fond d'un puits; or, il est à remarquer que c'est précisément au fond de la fosse que l'appareil puise le liquide, et que même il le met en mouvement de manière à mêler jusqu'à un certain point le meilleur au moins bon, ce qui permettra d'arroser les fumiers d'une manière plus uniforme. Quant à l'augmentation de profondeur, qui peut être nécessaire autour de

l'extrémité inférieure du tuyau conique, il est intéressant de remarquer que l'espèce particulière de succion développée par ce système offre elle-même un moyen de curage.

Pour l'arrosement des fumiers, il pourra être bon d'incliner la pompe conique, même quand son axe ne sera point un arc de cercle. La position du tuyau incliné oscillant a pu être convenablement maintenue au moyen de l'élasticité des cordages qui la retenaient de chaque côté.

Il faudrait peut-être une figure pour faire mieux concevoir comment un système rustique de pièces articulées, facile d'ailleurs à imaginer, a pu même au besoin être manœuvré par deux hommes. L'essentiel est de bien concevoir comment l'inclinaison du jet d'eau alternatif permet d'employer la vitesse acquise de l'eau pour l'arrosement des fumiers.

Il est intéressant de remarquer que cet appareil a l'avantage spécial de pouvoir être confectionné en quelques heures avec des planches, quand les constructeurs manquent de pompes d'épuisement ou de vis d'Archimède, pour les épuisements temporaires, dans les limites où il peut être employé.

Quant à ce que j'ai dit sur la durée de chaque période pour des hauteurs données de versement, il est à peine nécessaire d'ajouter que pour une même machine, l'étendue de l'oscillation dépendant jusqu'à un certain point de la force avec laquelle elle est manœuvrée, cette durée n'est pas nécessairement la même si l'on emploie des hommes de forces différentes.

J'ajouterai donc, seulement pour fixer les idées, un résultat retrouvé depuis que ce qui précède est imprimé. Pour une pompe conique verticale dont le tuyau cylindrique avait 54 centimètres de diamètre et 60 centimètres de haut, le tuyau conique inférieur ayant 135 centimètres de côté et 1 mètre environ de diamètre à sa partie inférieure, la durée de la période était sensiblement d'une seconde, moitié à peu près de la durée trouvée pour un versement à une hauteur environ quadruple. Deux hommes saisissaient le mouvement avec facilité; l'effort se faisait pour cette petite hauteur de haut en bas.

Il est intéressant de rappeler ici une expérience mentionnée dans un Mémoire sur les ondes que j'ai publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, 1re série, année 1848. Un petit

tuyau conique de ce genre, plongé dans un réservoir assez grand pour qu'il y eût des vagues, élevait de l'eau alternativement par le sommet d'un tuyau cylindrique soudé au tuyau conique de manière à former une petite pompe de ce genre, soutenue sur l'eau par un flotteur oscillant verticalement avec les vagues. Sans répéter ce que j'en ai dit alors, j'ai cru intéressant, pour compléter cette Note, de montrer combien les applications de cette pompe peuvent être variées [*].

Il ne faut pas oublier que pour les hauteurs de versement très-petites, on est naturellement porté à faire l'effort de haut en bas.

Nota. — Ce système a été mentionné favorablement dans un Rapport à la Société centrale d'Agriculture par M. Combes, qui l'avait vu fonctionner à Versailles. Un Rapport favorable a été fait sur la même pompe à la Société centrale des Architectes, dont plusieurs membres l'avaient aussi vu fonctionner. Enfin, M. Paris, architecte de la ville de

---

[*] A l'occasion de cette application du mouvement des vagues, je crois utile d'ajouter au Mémoire sur les ondes, publié dernièrement dans ce journal, que j'ai eu occasion de faire au mois d'août 1866, dans la rade de Cherbourg, des observations d'où il résulte que, si le vent est devenu assez faible, quoique les vagues conservent une certaine force, quand on observe le mouvement de va-et-vient de l'écume dans le champ d'une lunette fixe, on s'aperçoit, dans des circonstances convenables, qu'après un temps assez long cette écume n'a pas changé bien sensiblement de place; de sorte qu'il paraît que le transport réel doit être très-faible quand le vent n'agit plus depuis assez longtemps.

Pendant le temps qui s'est écoulé entre l'époque où le Mémoire précité a été imprimé et celle où les cahiers du journal qui le renferment ont été publiés, j'ai soumis le manuscrit au jugement de la Société de Physique de Genève. Il a été l'objet d'un Rapport verbal par M. Daniel Colladon et M. de la Rive, Associé étranger de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Comme j'avais averti qu'il était sous-presse dans ce journal, il ne pouvait être publié à Genève; mais j'attachais une grande importance à l'opinion de juges aussi compétents, qui ont précisément remarqué, comme je l'ai vu depuis sur le manuscrit scrupuleusement examiné par eux, les points qui me paraissaient à moi-même les plus essentiels.

Le résultat de cet examen m'a fait admettre à l'unanimité au nombre des deux seuls Membres honoraires de cette Société célèbre qui y ont été dernièrement nommés.

Versailles, a certifié qu'il l'a *employée avec succès pendant une année environ.* « Elle élevait, dit-il, beaucoup d'eau à des hauteurs variant
» de 2 à 3 mètres, et son jeu était très-régulier; mais telle qu'elle
» avait été exécutée pour le cimetière du quartier Notre-Dame de la
» ville, elle avait un inconvénient consistant en ce qu'il fallait un
» apprentissage pour pouvoir s'en servir, tandis que la pompe appli-
» cable à cette localité doit pouvoir être manœuvrée indistinctement
» par toutes les personnes qui la fréquentent. »

J'ai indiqué ci-dessus les moyens d'éviter l'inconvénient dont il s'agit, et dont il sera facile de faire l'essai, que j'aurais fait moi-même depuis longtemps si je n'en avais été empêché par diverses préoccupations. Mais j'ai cru devoir appeler plus spécialement l'attention publique sur ce sujet à l'occasion de l'Exposition universelle, à cause des services que ce système pourra rendre à raison de sa *rusticité*, et parce qu'il n'est jamais d'ailleurs sans intérêt de signaler des effets singuliers qui semblent, au premier aperçu, contraires aux effets généralement connus d'appareils ayant en apparence une forme semblable.

De l'effet des Attractions locales sur les longitudes et les azimuts; applications d'un nouveau Théorème à l'étude de la figure de la Terre;

PAR M. YVON VILLARCEAU [*].

Quelle que soit la figure du sphéroïde terrestre, par un point M de sa surface, menons une parallèle à l'axe du monde et, par cette parallèle, un plan de direction encore indéterminée et assujetti seulement à faire un petit angle avec le méridien astronomique du lieu; dans ce plan, et par le point M, menons une droite de direction également indéterminée et assujettie à faire un petit angle avec la direction du zénith astronomique. Nous nommerons le plan ainsi défini *plan méridien auxiliaire*, et la droite *zénith auxiliaire*. Soit B un signal géodésique observé du lieu M, Z son azimut par rapport au méridien auxiliaire, et compté du sud à l'ouest.

Si nous construisons une sphère ayant son centre au point M, les trois plans menés par le zénith auxiliaire, par le point B et la droite parallèle à l'axe du monde (dont nous considérons seulement la partie boréale), détermineront un triangle sphérique. Soient A, B, C les trois angles de ce triangle, répondant respectivement aux trois points où les droites percent la sphère; a, b, c les trois côtés opposés; ces côtés seront respectivement égaux à la distance polaire du signal B, à la colatitude du lieu et à la distance zénithale du signal (les deux derniers se rapportant bien entendu au zénith auxiliaire). On aura, dans le triangle ABC,

$$\cot A \sin C + \cos b \cos C - \cot a \sin b = 0.$$

Considérons actuellement la vraie direction du zénith, telle que la

[*] Ce Mémoire est, sauf un léger changement de forme, la reproduction de Communications faites à l'Académie des Sciences, dans ses séances des 26 mars 1866 et 2 avril 1867.

déterminent les attractions locales et autres, et formons un nouveau triangle sphérique au moyen de cette direction et de celles du pôle et du point B. Soient alors A′, B′, C′, a', b', c' les angles et les côtés de ce nouveau triangle. Les deux triangles n'auront de commun que le côté $a = a'$. Pour déterminer les différences des quantités homologues dans les deux triangles, il suffira de différentier l'équation précédente en y supposant a constant. Effectuant la différentiation et ayant recours à des relations connues, on trouve

$$\delta A + (\cos b - \cot c \sin b \cos A)\delta C + \cot c \sin A \,\delta b = 0.$$

Or, le point B étant censé à l'horizon du lieu M, on a $c' = 90$ degrés et $\cot c' = 0$; d'où, en négligeant les quantités du deuxième ordre,

$$(1) \qquad \delta A + \cos b \,\delta C = 0.$$

Pour nous conformer aux usages géodésiques, nous remplacerons les azimuts A′ et A par leurs suppléments $180° - Z'$ et $180° - Z$; ce qui donnera $\delta A = A' - A = -(Z' - Z)$. Si nous comptons les longitudes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ du méridien auxiliaire et du méridien astronomique dans le sens de l'est à l'ouest, nous aurons $C + \mathcal{L} = C' + \mathcal{L}'$, d'où $\delta C = C' - C = -(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$; enfin, b étant égal au complément de la latitude L du zénith auxiliaire, on a

$$\cos b = \sin L.$$

Moyennant la substitution de ces valeurs, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad Z' - Z + \sin L(\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = 0,$$

relation qui a nécessairement lieu, quels que soient les attractions locales et le plan méridien auxiliaire considéré, pourvu que l'écart angulaire entre ce plan et le méridien astronomique reste un petit angle.

Application à la démonstration d'un théorème de Laplace relatif aux sphéroïdes peu différents de la sphère.

Soit une ligne géodésique issue d'un lieu dont la longitude et la latitude sont $\mathcal{L}_0$ et L_0, et menée suivant la direction australe du méridien de ce lieu : il est clair que si la Terre est un sphéroïde de révolution

autour de son axe de figure, la ligne géodésique sera contenue tout entière dans le plan méridien passant par le lieu de départ; mais si le sphéroïde n'est pas de révolution, la ligne géodésique s'écartera progressivement de ce plan. En un point de latitude L, la direction de la ligne géodésique ne coïncidera pas non plus avec le méridien astronomique de ce lieu. Si nous prenons, pour direction du signal B, celle du prolongement austral de la ligne géodésique, l'azimut astronomique de B sera Z'. Maintenant, considérons l'ensemble des points de la ligne géodésique compris entre L_0 et L, et soit, en un point de cette ligne, $\mathfrak{L}$ la longitude d'un plan méridien auxiliaire assujetti à être tangent à la ligne géodésique en ce point. Au point L_0, $\mathfrak{L}$ se confondra avec $\mathfrak{L}_0$, et au point L on aura

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \int_{L_0}^{L} \frac{d\mathfrak{L}}{dL} dL.$$

Or la dérivée $\frac{d\mathfrak{L}}{dL}$ étant supposée développée en séries suivant les puissances de l'accroissement $L - L_0$, elle aura la forme

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dL} = p(L - L_0) + q(L - L_0)^2 + \ldots,$$

puisqu'à l'origine le plan méridien auxiliaire se confond avec le méridien astronomique; on aura donc

$$\int_{L_0}^{L} \frac{d\mathfrak{L}}{dL} dL = \frac{1}{2} p(L - L_0)^2 + \frac{1}{3} q(L - L_0)^3 + \ldots.$$

Le sphéroïde étant actuellement supposé peu différent de la sphère, les coefficients $p, q, \ldots$ seront très-petits, du premier ordre par exemple, car ils doivent s'annuler dans le cas de la sphère; si nous supposons, en outre, que l'amplitude $L - L_0$ soit du même ordre de petitesse, l'intégrale précédente sera une quantité très-petite du troisième ordre : d'où il suit qu'aux termes près de cet ordre, on aura $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$. Prenant donc pour plan méridien auxiliaire au point M celui qui est tangent à la ligne géodésique en ce point, on aura, pour l'azimut Z de B rapporté à ce plan, Z = 0. Substituant enfin dans l'équation (2) les précédentes

valeurs de $\mathfrak{L}$ et Z, il viendra

$$Z' + \sin L(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}_0) = 0, \tag{3}$$

équation qui coïncide avec le théorème donné par Laplace dans la *Mécanique céleste* (t. II, p. 117), sous la forme $(V - V_1)\sin\psi_1 = \varpi$. Il faut remarquer que ϖ est l'azimut Z' compté en sens contraire, et que ψ_1 est la latitude du point de départ; or, au degré d'approximation de ce théorème, on peut écrire L au lieu de ψ_1. L'auteur de la *Mécanique céleste* a déduit son résultat d'une analyse assez compliquée; il en caractérise l'importance en ces termes :

« Ainsi l'on peut, par l'observation seule et indépendamment de la connaissance de la figure de la Terre, déterminer la différence en longitude des méridiens correspondants aux extrémités de l'arc mesuré, et si la valeur de ϖ est telle, qu'on ne puisse l'attribuer aux erreurs des observations, on sera sûr que la Terre n'est pas un sphéroïde de révolution. »

Le théorème de Laplace ne concerne que les arcs méridiens, et son application est limitée par la condition que leur amplitude reste faible. Il n'en est pas ainsi de notre formule (2) que nous allons appliquer à l'ensemble des points principaux d'un réseau trigonométrique.

Application générale à l'étude de la figure de la Terre.

Imaginons un sphéroïde défini et dont les dimensions auront servi de base au calcul des longitudes, latitudes et azimuts géodésiques. Transportons sur ce sphéroïde les positions géographiques et directions azimutales fournies de proche en proche par le calcul. Au lieu quelconque M, dont la longitude et la latitude géodésiques sont $\mathfrak{L}$ et L, prenons pour méridien auxiliaire le méridien géodésique tracé par le point M. Si la figure de la Terre est telle qu'on la suppose, la direction australe du méridien résultant du calcul coïncidera en M, au moins approximativement, avec celle du méridien tracé par ce point; dans le cas contraire, la direction calculée fera un certain angle μ avec ce méridien. Supposons cet angle compté du sud vers l'ouest : un azimut rapporté à notre méridien auxiliaire se trouvera être égal à l'azimut

calculé, augmenté de l'angle μ. Convenons, pour plus de simplicité, que Z désigne désormais l'azimut calculé, nous devrons changer, dans l'équation (2), Z en $Z+\mu$. Alors cette équation deviendra

$$(4) \qquad Z' - Z + \sin L(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}) = \mu.$$

Cette relation a lieu *quelles que soient les attractions locales*. Dans le cas d'un sphéroïde peu différent de la sphère, μ sera un petit angle qui ne variera qu'à raison de la configuration des traits généraux du sphéroïde. Dans le cas d'un sphéroïde de révolution autour de l'axe de rotation, μ sera constamment nul, aux erreurs près des observations, si, comme nous le supposons d'ailleurs, les constantes géodésiques ont reçu les valeurs les plus convenables. Il suffirait donc d'établir qu'aucun système de valeurs de ces constantes ne peut comporter une valeur nulle de l'angle μ en un seul point du sphéroïde, pour démontrer que la figure de la Terre n'est pas celle d'une surface de révolution autour de l'axe de rotation.

Les mêmes considérations s'appliqueraient au cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, et le résultat $\mu \gtrless 0$ en détruirait la possibilité.

Si donc le sphéroïde terrestre peut, dans son ensemble, être assimilé à un ellipsoïde de révolution, on aura en chaque point et *quelles que soient les attractions locales*

$$(5) \qquad Z' - Z + \sin L(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}) = 0,$$

en faisant la part des erreurs des observations.

On est dans l'usage d'assimiler la figure de la Terre à un sphéroïde de révolution dont on détermine les dimensions en posant et résolvant des équations de la forme

$$(6) \qquad L' - L = \delta L, \quad Z' - Z = \delta Z, \quad \mathfrak{L}' - \mathfrak{L} = \delta \mathfrak{L},$$

où L, Z, $\mathfrak{L}$ désignent des valeurs correspondantes à un système de constantes géodésiques, et δL, δZ, $\delta \mathfrak{L}$ les corrections dépendantes des corrections inconnues des mêmes constantes. On sait d'ailleurs à l'avance que, tout en faisant la part des erreurs des observations, ces

équations ne peuvent pas généralement être satisfaites, à cause des attractions locales : le poids des résultats est d'autant diminué qu'il s'en faut davantage que ces équations ne soient satisfaites. Or, aujourd'hui que les longitudes astronomiques peuvent rivaliser en précision avec les latitudes, il semble qu'il doive y avoir avantage à recourir aux équations de condition de la forme

$$(7) \qquad Z' - Z + \sin L(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}) = \delta Z + \sin L \delta \mathfrak{L},$$

qui se déduisent de la formule (5); ces équations devant être satisfaites quelles que soient les attractions locales.

L'incertitude des azimuts géodésiques provenant de l'accumulation des erreurs des angles des triangles serait un obstacle, dans le cas où les chaînes présenteraient la configuration élémentaire qu'on remarque dans la triangulation française : telle n'est pas la triangulation anglaise de l'Inde, où les chaînes donnent lieu à de nombreuses équations entre les angles et entre les côtés des triangles, équations dont on profite pour réduire considérablement les minimes erreurs de la triangulation. La détermination astronomique des longitudes et azimuts, commencée l'année dernière dans l'Inde anglaise, permettra sans doute d'appliquer notre équation à la remarquable triangulation qui a été effectuée dans cette contrée. Quant au réseau français, comme les chaînes principales sont environnées de triangles de premier ordre qui ont été mesurés avec soin, on pourrait les remplacer par des chaînes plus composées et analogues à celles de l'Inde anglaise : le système de compensation y étant appliqué, les erreurs des azimuts géodésiques seraient certainement réduites.

Nous devons toutefois faire remarquer que les équations de la forme (7) sont insuffisantes à déterminer les corrections de toutes les constantes géodésiques : en effet, si l'on exprime δZ et $\delta \mathfrak{L}$ en fonction de ces corrections, on trouve que le coefficient de la correction relative aux dimensions absolues du sphéroïde s'annule : il serait donc nécessaire de recourir à celles des équations de la forme (6) qu'on jugerait le plus propres à la détermination de l'inconnue restante ; mais comme ces équations sont affectées des effets des attractions locales, il

faudrait leur attribuer un poids inférieur à celui des équations de la forme (7) et que le calcul lui-même pourrait fixer avec une suffisante approximation.

En considérant le coefficient de la correction de l'aplatissement, dans le second membre de l'équation (7), on trouve qu'une chaîne méridienne ou une chaîne parallèle sont impropres à sa détermination, et que la direction la plus favorable est celle qui partage en deux parties égales l'angle du méridien et du premier vertical, quand on veut employer une chaîne unique, et s'affranchir complétement de l'effet des attractions locales. Une chaîne de triangles qui, partant de la côte sud du Portugal, se dirigerait vers le nord-est de la Russie d'Europe en traversant l'Espagne, la France, l'Allemagne et la Russie remplirait ces conditions.

L'élimination de l'une des inconnues qui résulte de l'emploi de l'équation (7) et la petitesse des coefficients de la correction de l'aplatissement, quand on l'applique à divers points appartenant à une même méridienne ou à un même parallèle, rendent au contraire cette équation éminemment propre à la discussion ou plutôt au contrôle d'une chaîne ou portion de chaîne dirigée dans le sens du méridien ou dans le sens perpendiculaire. Ajoutons que l'élimination de la correction de l'azimut de départ entre de pareilles équations conduit à de nouvelles équations dans lesquelles les coefficients des inconnues restantes deviennent très-petits, lorsque les portions de chaînes considérées ne comprennent qu'un petit nombre de degrés. Alors ces équations se réduisent sensiblement à leurs parties connues, et il ne reste qu'à examiner si les nombres restants peuvent ou non être imputés aux erreurs des azimuts géodésiques; car les erreurs des observations astronomiques et celles des longitudes géodésiques sont négligeables vis-à-vis des précédentes. Or la théorie des probabilités permet d'exprimer facilement l'erreur de l'azimut extrême d'une chaîne de triangles, en fonction des erreurs individuelles des sommes des angles de chacun d'eux.

L'application de notre théorème sur les attractions locales offre, relativement au contrôle de l'exactitude d'une chaîne de triangles, des avantages dont l'importance se comprendra facilement, si l'on se rappelle que, depuis quarante ans, la géodésie française est restée arrêtée

dans ses développements par les doutes que l'on avait conçus sur la vraie cause des discordances entre les résultats de l'astronomie et ceux de la géodésie.

Une application numérique du théorème sur les attractions locales a été faite aux deux chaînes principales de la triangulation française : la Méridienne de Dunkerque et le Parallèle de Paris. Cette application sera développée à la fin du présent Mémoire, avec ses conséquences.

Dans ce qui précède, nous avons présenté la démonstration d'un théorème sur les attractions locales, en nous bornant à en indiquer sommairement les applications. Il nous a semblé nécessaire, pour en bien faire comprendre la portée, d'entrer dans quelques développements.

Lorsque l'on compare les coordonnées et azimuts des stations géodésiques déterminés astronomiquement, avec les valeurs des coordonnées et azimuts déduites des calculs géodésiques, on trouve des différences que l'on cherche tout d'abord à faire disparaître, en corrigeant les données numériques qui ont servi de point de départ dans les calculs géodésiques. Après avoir déterminé de la manière la plus convenable les corrections de ces données, on reconnaît généralement que les discordances sont réduites, mais conservent néanmoins des valeurs sensibles. La solution est admissible si les écarts définitifs peuvent s'expliquer au moyen des légères inexactitudes des observations. Quand au contraire ces écarts sont hors de proportion avec les erreurs des observations, on les explique en les attribuant aux irrégularités de la figure de la Terre, que l'on parvient ainsi à évaluer approximativement. Mais cette évaluation reste empreinte d'incertitude, s'il peut rester quelque doute sur la précision des opérations astronomiques ou l'exactitude de la triangulation. C'est ce qui est arrivé notamment lorsqu'on a voulu utiliser les mesures de longitudes et d'azimuts effectuées sur le parallèle de Paris et sur le parallèle moyen, il y a une quarantaine d'années. La méthode des signaux de feu, qui réalisait déjà un progrès incontestable, ne présentait cependant pas de garanties suffisantes : les moyens d'obtenir le temps absolu dans les stations n'offraient pas la précision nécessaire; l'influence des équations per-

sonnelles était à peine entrevue. Aussi, les écarts considérables qui ont été observés entre l'astronomie et la géodésie ont-ils simplement conduit, en ce qui concerne le parallèle moyen, par exemple, à supposer que la chaîne des Alpes avait pu produire des anomalies prononcées. Ces deux grandes opérations n'ont amené aucun progrès réel dans nos connaissances sur la figure de la Terre : pour atténuer l'effet des anomalies persistantes, il a fallu se résoudre à combiner les nouvelles mesures avec celle de l'arc de l'équateur; mais alors on renonçait à en tirer parti pour l'étude de la figure de la Terre dans nos contrées. Aujourd'hui, grâce aux progrès des méthodes astronomiques, l'application du théorème sur les attractions locales nous permet de lever ces difficultés.

Trois éléments interviennent dans la comparaison qui nous occupe : le réseau trigonométrique, les observations astronomiques et les attractions locales. Les opérations géodésiques devraient évidemment se contrôler d'elles-mêmes : la multiplicité des mesures de bases, jointe à la comparaison des valeurs des côtés communs aux nœuds des chaînes, offrirait peut-être des garanties suffisantes, si l'accord recherché avait effectivement lieu; mais on sait qu'il n'est pas toujours réalisé d'assez près, du moins dans la géodésie française; on a vu d'ailleurs que l'accord obtenu résulte parfois d'erreurs qui se compensent. Nous sommes donc conduit à supposer les opérations géodésiques empreintes d'erreurs sensibles, et à rechercher les moyens de les mettre en évidence. Quant aux opérations astronomiques, elles ont atteint, de nos jours, un grand degré de perfection : leur discussion est facile et l'on s'assure aisément que leurs incertitudes ne peuvent plus porter que sur les fractions de seconde d'arc. Eu égard à ce que les discordances que nous avons en vue dépassent une trentaine de secondes, en plus d'un point du réseau français, on nous permettra de mettre les résultats astronomiques hors de cause. Enfin les attractions locales pouvant, d'après le nouveau théorème, être éliminées d'une certaine combinaison des longitudes et des azimuts; s'il subsiste des discordances entre les résultats astronomiques et géodésiques, après l'application du théorème, on sera forcément amené à les attribuer, pour la plus grande partie, aux erreurs de la triangulation. C'est ce qui résultera avec évidence du développement des calculs suivants.

Désignons par L_i et $\mathcal{L}_i$ la latitude et la longitude d'une station, et Z_i l'azimut d'un signal observé de cette station, compté du sud vers l'ouest. Réservant ces lettres non accompagnées d'accents à la désignation des résultats géodésiques, nous appliquerons un accent aux mêmes lettres, pour distinguer les résultats fournis par l'astronomie. L'équation (7), qui est relative à l'ellipsoïde de révolution et a lieu, quelles que soient les attractions locales, deviendra

$$(8) \qquad Z'_i - Z_i + \sin L_i(\mathcal{L}'_i - \mathcal{L}_i) = \delta Z_i + \sin L_i \delta \mathcal{L}_i.$$

Les corrections δZ_i et $\delta \mathcal{L}_i$ dépendent des corrections indéterminées des éléments des calculs géodésiques, et qui se rapportent à la longitude $\mathcal{L}_0$ et à la latitude L_0 du point de départ (Paris, dans notre géodésie), à l'azimut de départ Z_0, à l'aplatissement α : elles dépendent en outre des corrections $\delta\beta = \frac{\delta Q}{Q}$, $\delta\gamma = \frac{\delta s}{s}$, en désignant par Q le quart de méridien et s la longueur d'une ligne géodésique quelconque (l'une des bases par exemple). Les expressions de δZ_i et $\delta \mathcal{L}_i$ sont

$$\delta Z_i = \frac{dZ_i}{dZ_0}\delta Z_0 \qquad [*] \qquad + \frac{dZ_i}{dL_0}\delta L_0 + \frac{dZ_i}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dZ_i}{d\beta}(\delta\beta - \delta\gamma),$$

$$\delta \mathcal{L}_i = \frac{d\mathcal{L}_i}{dZ_0}\delta Z_0 + \frac{d\mathcal{L}_i}{d\mathcal{L}_0}\delta\mathcal{L}_0 + \frac{d\mathcal{L}_i}{dL_0}\delta L_0 + \frac{d\mathcal{L}_i}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\mathcal{L}_i}{d\beta}(\delta\beta - \delta\gamma).$$

Nous avons donné, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 2 mars 1866, les expressions des dérivées qui figurent ici. En les formant, on a négligé, suivant l'usage, l'aplatissement et ses puissances supérieures, comme donnant lieu à des termes du second ordre [**].

---

[*] Le coefficient $\frac{dZ_i}{d\mathcal{L}_0}$ est nul.

[**] On a négligé également les différences que présentent, sous le rapport de la longueur et de l'orientation, les éléments des lignes géodésiques menées sur le sphéroïde irrégulier et sur le sphéroïde de révolution, entre les deux points donnés. Il est facile de s'assurer qu'en attribuant aux attractions locales des effets s'élevant à 1' par exemple, les longitudes, latitudes et azimuts géodésiques n'en seraient pas sensiblement affectés.

Si, à l'aide de ces expressions que nous ne pouvons reproduire ici, on forme celle du second membre de l'équation (8), on obtient, après quelques transformations,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &Z'_i - Z_i + \sin L_i(\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i) \\ &\quad = \cos u_i\,\delta Z_0 + \sin L_i\,\delta\mathfrak{L}_0 - \cos L_i \sin(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)\,\delta L_0 \\ &\qquad - \frac{\cos L_i \sin(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)}{\sin 1''}\Big[2\cos\tfrac{1}{2}(L_i + L_0)\sin\tfrac{1}{2}(L_i - L_0) \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{u_i \sin 1''}{\sin u_i} - 1\right)\sin L_i\Big]\cos L_0\,\delta\alpha, \end{aligned}\right.$$

u_i désignant l'amplitude angulaire de la ligne géodésique qui joint les deux stations. Au degré d'approximation convenu, on a

$$(10)\qquad \cos u_i = \sin L_0 \sin L_i + \cos L_0 \cos L_i \cos(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0);$$

d'où l'on déduit

$$(11)\quad \sin^2\tfrac{1}{2}u_i = \sin^2\tfrac{1}{2}(L_i - L_0) + \cos L_0 \cos L_i \sin^2\tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0).$$

Il n'y a pas à distinguer ici le signe de u_i, attendu que le second membre de l'équation (9) est une fonction paire de u_i.

La formule (9) donne lieu à deux remarques importantes : 1° Le second membre ne contient pas en dénominateur le facteur $\cos L_i$ qui accompagne les expressions de δZ_i et $\delta\mathfrak{L}_i$; en outre, $\sin(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)$ s'y trouve affecté de ce facteur. La quantité qu'il représente reste donc déterminée à toute latitude, bien que les éléments $Z'_i - Z_i$ et $\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i$ se trouvent individuellement sujets à indétermination. Cela se conçoit, si l'on remarque que l'azimut et la longitude astronomiques doivent être rapportés à un même méridien dont l'erreur sera celle correspondante à la latitude : il en est de même pour la longitude et l'azimut géodésiques. 2° La correction $\delta\beta - \delta\gamma$ se trouve éliminée. Il en résulte la nécessité de recourir aux équations de condition en usage, pour la détermination de la correction des dimensions absolues du sphéroïde.

La quantité $\frac{u_i \sin 1''}{\sin u_i} - 1$ est censée tirée d'une table spéciale que nous donnons ci-dessous; mais le terme correspondant sera presque toujours négligeable. Dès lors, on voit que le coefficient de $\delta\alpha$ est sensible-

ment proportionnel au produit des différences de longitude et de latitude $\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_0$ et $L_i - L_0$. En sorte que dans un système de deux chaînes, l'une méridienne, l'autre formant parallèle, et dont le point de départ occupe le croisement, le coefficient de $\delta\alpha$ sera très-petit du second ordre; les termes sensibles du deuxième membre de l'équation (9) se réduiront à ses trois premiers. Mais nous allons opérer une autre réduction, qui permettra la discussion d'une méridienne ou d'un parallèle, sans exiger pour ainsi dire de calcul.

Appliquons l'équation (9) au point de départ lui-même, nous aurons d'abord

$$\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_0 = 0, \quad L_i - L_0 = 0, \quad u_i = 0,$$

puis, en posant

$$\zeta = Z'_0 - Z_0 + \sin L_0 (\mathcal{L}'_0 - \mathcal{L}_0), \tag{12}$$

$$\zeta = \delta Z_0 + \sin L_0 \delta \mathcal{L}_0. \tag{13}$$

Cette équation devrait être jointe aux équations de la forme (9), pour la détermination des inconnues, si cette détermination est possible; néanmoins, nous lui ferons jouer un rôle distinct. Nous supposerons qu'une mesure très-exacte de Z'_0 et de $\mathcal{L}'_0$, suivant les cas, ait été faite au lieu de départ : l'équation (13) sera affranchie de toute inexactitude; elle sera donc très-propre à la détermination de δZ_0 en fonction de $\delta\mathcal{L}_0$. Au contraire, les valeurs de Z_i relatives aux autres stations seront d'autant moins exactes, que ces stations seront plus éloignées du point de départ, à cause de l'accumulation des erreurs des angles des triangles intermédiaires. Nous éliminerons donc δZ_0 entre l'équation (13) et les équations de la forme (9); ce qui donnera, en ayant égard à la valeur de $\cos u_i$,

$$\left\{\begin{aligned} & Z'_i - Z_i + \sin L_i (\mathcal{L}'_i - \mathcal{L}_i) - \zeta \cos u_i \\ & \quad = \left[\sin (L_i - L_0) + 2 \sin L_0 \cos L_i \sin^2 \tfrac{1}{2} (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_0)\right] \cos L_0 \delta \mathcal{L}_0 \\ & \qquad - \cos L_i \sin (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_0) \delta L_0 \\ & \qquad - \frac{\cos L_i \sin (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_0)}{\sin 1''} \Big[2 \cos \tfrac{1}{2} (L_i + L_0) \sin \tfrac{1}{2} (L_i - L_0) \\ & \qquad\qquad + \left(\frac{u_i \sin 1''}{\sin u_i} - 1\right) \sin L_i \Big] \cos L_0 \delta \alpha. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

L'équation (11) servira au calcul de u_i : ayant obtenu ζ par la formule (12), on aura le moyen de calculer les coefficients des inconnues $\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0$, δL_0 et $\cos L_0 \delta\alpha$; mais ζ étant supposé assez petit, ainsi que les valeurs de $L_i - L_0$ et $\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0$, on pourra faire le plus souvent $\cos u_i = 1$, et réduire le coefficient de $\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0$ à $\sin (L_i - L_0)$: le terme en $\cos L_0 \delta\alpha$ disparaîtra dans le cas indiqué plus haut. Lors donc que l'on aura à discuter une chaîne méridienne ou un parallèle, il faudra tenter la résolution d'équations qui ne contiendront plus que deux inconnues, et dont les coefficients seront très-faciles à former. Si la résolution de ces équations conduit à des valeurs admissibles des inconnues, et que les erreurs des équations puissent se confondre avec celles des azimuts géodésiques provenant de l'accumulation des minimes erreurs des angles des triangles, on en conclura que la chaîne considérée peut être employée utilement : dans le cas contraire, elle devra être rejetée comme entachée d'erreurs.

Admettant qu'on ait soumis à ce genre de contrôle toutes les chaînes d'une triangulation, on emploiera celles qui auront été jugées admissibles à la détermination des valeurs les plus approchées des inconnues : alors, on fera de nouvelles applications de la formule (14), en introduisant le poids des équations, et fixant ce poids d'après les erreurs moyennes des angles des triangles intermédiaires. On voit, d'après la composition du coefficient de $\cos L_0 \delta\alpha$, que les stations qui contribueront le plus efficacement à la détermination de l'aplatissement, sont celles qui seront liées à la station centrale par des lignes géodésiques orientées à 45 degrés, ou environ. Si l'on veut utiliser un système formé d'un méridien et d'un parallèle, il faudra prendre pour point de départ la station la plus éloignée du point de croisement de ces chaînes.

Les trois inconnues étant tirées des équations, et ayant vérifié que les erreurs subsistantes restent renfermées dans des limites admissibles, on aura, suivant l'équation (13),

$$\delta Z_0 = \zeta - \sin L_0 \delta \mathfrak{L}_0. \qquad (15)$$

On remarquera que si les chaînes n'embrassent pas une étendue déjà considérable, les coefficients des inconnues dans les équations (14) pourront n'être pas assez forts, pour assurer l'exacte détermination des

inconnues : l'usage de ces équations serait restreint à la simple discussion ou au contrôle des chaînes. Cependant, on remarquera aussi que si l'on emploie les équations inexactes de la forme

$$(16) \qquad \mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i = \delta\mathfrak{L}_i \quad \text{ou} \quad L'_i - L_i = \delta L_i,$$

l'élimination de l'inconnue $\delta\beta - \delta\gamma$ pourra conduire à des systèmes d'équations à trois inconnues où les coefficients ne seront peut-être pas plus forts que ceux des équations (14) : en outre, on aurait l'inconvénient d'opérer sur des équations dont les parties connues seraient faussées par l'influence des attractions locales. On avisera suivant les cas.

Il faudra finalement recourir aux équations (16) pour obtenir l'inconnue restante $(\delta\beta - \delta\gamma)$. La comparaison des valeurs corrigées des $\mathfrak{L}_i$ et L_i, avec les valeurs astronomiques correspondantes, fera connaître, aux erreurs près des observations, les effets des attractions locales suivant le premier vertical et suivant le méridien ; leurs composantes seront représentées respectivement par

$$\cos L_i(\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i) \quad \text{et} \quad L'_i - L_i.$$

Nous terminerons en indiquant une dernière application de l'équation (14).

Les géographes sont dans l'usage de compenser une triangulation, en déterminant les corrections des angles des triangles de manière à satisfaire à un ensemble de conditions, dont l'une consiste à faire concorder les azimuts géodésiques avec les azimuts astronomiques. Comme ces corrections se font aux extrémités de parties de chaînes comprenant une faible amplitude, on pourrait assujettir les corrections à satisfaire à l'équation (14) dont le second membre serait égalé à zéro. Ce serait plus exact que de satisfaire seulement à la condition $Z'_i - Z_i = 0$.

Table des valeurs de la fonction $\frac{u \sin 1''}{\sin u} - 1$.

u (° ′)	$\frac{u \sin 1''}{\sin u} - 1$	DIFF.	u (° ′)	$\frac{u \sin 1''}{\sin u} - 1$	DIFF.	u (° ′)	$\frac{u \sin 1''}{\sin u} - 1$	DIFF.	u (° ′)	$\frac{u \sin 1''}{\sin u} - 1$	DIFF.
0. 0	0,000 000	2	8. 0	0,003 257	137	16. 0	0,013 116	277	24. 0	0,029 853	425
10	002	4	10	3 394	141	10	13 393	281	10	30 278	428
20	006	7	20	3 535	143	20	13 674	283	20	30 706	431
30	013	10	30	3 678	146	30	13 957	286	30	31 137	434
40	023	13	40	3 824	149	40	14 243	289	40	31 571	438
50	036	15	50	3 973	151	50	14 532	293	50	32 009	441
1. 0	0,000 051	18	9. 0	0,004 124	155	17. 0	0,014 825	295	25. 0	0,032 450	444
10	069	21	10	4 279	157	10	15 120	298	10	32 894	447
20	090	24	20	4 436	161	20	15 418	301	20	33 341	451
30	114	27	30	4 597	163	30	15 719	304	30	33 792	453
40	141	30	40	4 760	166	40	16 023	307	40	34 245	458
50	171	32	50	4 926	169	50	16 330	311	50	34 703	460
2. 0	0,000 203	35	10. 0	0,005 095	172	18. 0	0,016 641	313	26. 0	0,035 163	464
10	238	38	10	5 267	175	10	16 954	317	10	35 627	466
20	276	41	20	5 442	178	20	17 271	319	20	36 093	470
30	317	44	30	5 620	180	30	17 590	322	30	36 563	474
40	361	47	40	5 800	184	40	17 912	326	40	37 037	476
50	408	49	50	5 984	186	50	18 238	328	50	37 513	480
3. 0	0,000 457	52	11. 0	0,006 170	189	19. 0	0,018 566	331	27. 0	0,037 993	483
10	509	55	10	6 359	192	10	18 897	335	10	38 476	486
20	564	58	20	6 551	195	20	19 232	337	20	38 962	490
30	622	61	30	6 746	197	30	19 569	341	30	39 452	493
40	683	64	40	6 943	201	40	19 910	343	40	39 945	496
50	747	66	50	7 144	204	50	20 253	347	50	40 441	500
4. 0	0,000 813	69	12. 0	0,007 348	207	20. 0	0,020 600	350	28. 0	0,040 941	503
10	0 882	72	10	7 555	209	10	20 950	353	10	41 444	506
20	0 954	75	20	7 764	212	20	21 303	355	20	41 950	510
30	1 029	78	30	7 976	216	30	21 658	359	30	42 460	513
40	1 107	80	40	8 192	218	40	22 017	363	40	42 973	516
50	1 187	83	50	8 410	221	50	22 380	365	50	43 489	520
5. 0	0,001 270	86	13. 0	0,008 631	224	21. 0	0,022 745	368	29. 0	0,044 009	523
10	1 356	89	10	8 855	227	10	23 113	372	10	44 532	526
20	1 445	92	20	9 082	230	20	23 485	374	20	45 058	530
30	1 537	94	30	9 312	233	30	23 859	378	30	45 588	533
40	1 631	98	40	9 545	236	40	24 237	381	40	46 121	537
50	1 729	100	50	9 781	239	50	24 618	384	50	46 658	540
6. 0	0,001 829	103	14. 0	0,010 020	242	22. 0	0,025 002	387	30. 0	0,047 198	543
10	1 932	106	10	10 262	245	10	25 389	390	10	47 741	547
20	2 038	110	20	10 507	247	20	25 779	393	20	48 288	550
30	2 148	112	30	10 754	251	30	26 172	397	30	48 838	553
40	2 260	115	40	11 005	254	40	26 569	399	40	49 391	557
50	2 375	117	50	11 259	256	50	26 968	403	50	49 948	561
7. 0	0,002 492	120	15. 0	0,011 515	259	23. 0	0,027 371	406	31. 0	0,050 509	564
10	2 612	123	10	11 774	263	10	27 777	409	10	51 073	567
20	2 735	126	20	12 037	265	20	28 186	412	20	51 640	571
30	2 861	129	30	12 302	268	30	28 598	415	30	52 211	574
40	2 990	132	40	12 570	272	40	29 013	418	40	52 785	578
50	3 122	135	50	12 842	274	50	29 431	422	50	53 363	581
8. 0	0,003 257	137	16. 0	0,013 116	277	24. 0	0,029 853	425	32. 0	0,053 944	

Application spéciale du théorème sur les attractions locales, à la discussion du parallèle de Paris et de la partie de la méridienne de Dunkerque comprise entre Paris et Carcassonne.

Nous présenterons ici l'application la plus étendue qu'il nous soit actuellement possible de faire de notre théorème aux données de l'astronomie et de la géodésie. Ces données sont relatives aux longitudes et aux azimuts : or les longitudes n'ont été encore déterminées au moyen de l'électricité, sur une large échelle, que dans notre pays. (On commence seulement, depuis un an, à faire la même application de l'électricité aux triangles de l'Inde.)

En France, les azimuts n'ont pu être mesurés qu'en un nombre très-restreint de stations, la disparition des bornes géodésiques et les dispositions du terrain ayant rendu ces mesures impossibles dans les autres stations.

Au surplus, nous présenterons dans le tableau suivant l'ensemble des déterminations astronomiques obtenues par l'Observatoire de Paris et le résultat de leur comparaison avec les coordonnées et azimuts géodésiques publiés par le Dépôt de la Guerre, et corrigés au besoin, pour les ramener à une mesure commune. Le calcul de ces corrections a été présenté dans le Mémoire cité plus haut.

Comparaison des longitudes, latitudes et azimuts astronomiques déterminés par l'Observatoire impérial de Paris, avec les coordonnées et azimuts géodésiques du Dépôt de la Guerre.

STATION.	LONGITUDE			LATITUDE			SIGNAL GÉODÉSIQUE observé.	AZIMUT			ANNÉE.
	astronomique.	géodés.	astron. — géodés.	astronomique.	géodés.	astron. — géodés.		astronomique.	géodés.	astron. — géodés.	
Brest (tour Saint-Louis)...	+6°.49'.37",4	42",5	— 5",1								1863
Brest (tour Saint-Louis)...				48°.23'.22",0	21",9	+0",1	Crozon......	359°.53'.10",5	18",0	— 7",5	1864
Biarritz................	+3.53.37,2	32,4	+ 4,8	43.29. »	38,4						1863
Nantes..	+3.53.12,6	18,1	— 5,5	47.13. »	7,8						1863
Marennes	+3.26.36,1	40,2	— 4,1	45.49. »	18,4						1864
Greenwich..............	+2.20. 9,5	18,9	— 9,4								1854
Greenwich..............				51.28.39,9	43,5	—3,6					
Havre..................	+2.13.39,6	45,0	— 5,4	49.29. »	16,3						1862
Dunkerque..............	—0. 2.17,5	22,7	+ 5,2	51. 2. 8,9	11,6	—2,7					1862
Paris (Observatoire)......	0. 0. 0,0	0,0	0,0	48.50.11,7	13,2	—1,5					
Saint-Martin-du-Tertre...	—0. 0 »	31,7		49. 6.33.9	36,2	—2,3	Panthéon....	—0. 6.52,4	54,2	+ 1,8	1866
Berry-Boüy.............	+0. 1.37,6	31,6	+ 6,0	47. 6. »	51,9						1856
Saligny-le-Vif...........	—0.25 »	50,2		47. 2.45,64	44,07	+1,6	Bourges.....	98 34.54,6	69,8	—15,2	1865
							Dun-le-Roi..	40. 0. 8,3	23,8	—15,5	
Rodez...	—0.14. 7,2	15,6	+ 8,4	44.21. 4,5	2,9	+1,6	Maillebiau..	239. 5.25,9	55,5	—29,6	1864
Carcassonne	—0. 0.42,0	47,0	+ 5,0	43.12.53,3	52,0	+1,3	Fanjeaux....	83.18.48,63	83,86	—35,2	1864
Lyon (Fourvières)	—2.29.15,9	10,3	— 5,6	45.45.46,3	43,6	+2,7					1865
Talmay, par le parallèle de..... Paris...	—3. 5.48,24	57,88	+ 9,6	47.21.24,7	24,9	—0,2	Mont-Roland.	353.16. »	—0,65		1863
Bourges.		58,48	+10,2		24,2	+0,5			20,06		
Strasbourg (Munster).....	—5.24.45,7	53,8	+ 8,1	48,34.55,9	56,6	—0,7	Donon.....	80. 7.48,6	50,3	—1,7	1863

Les observations faites à Dunkerque, Saligny-le-Vif, Rodez, Carcassonne, Lyon, Talmay, Strasbourg, Saint-Martin-du-Tertre, ainsi que la latitude et l'azimut de Brest, sont dues à M. Yvon Villarceau

Les stations dont les longitudes ont été obtenues, en même temps qu'on y a mesuré des azimuts, appartiennent exclusivement au parallèle de Paris et à la méridienne de Dunkerque, dont la station de Paris occupe le point de croisement. Encore devons-nous faire remarquer, relativement à Paris et Bourges, que les mesures d'azimut n'ont pas été effectuées aux stations mêmes dont on a mesuré la longitude. Relativement à Paris, c'est de Saint-Martin-du-Tertre que l'azimut a été observé. Quant à Bourges, on a déterminé la longitude à Berry-Boüy, et l'azimut à Saligny-le-Vif, stations séparées de Bourges par un côté de triangle. En supposant donc les observations ramenées à Paris d'une part, et à une position intermédiaire entre Berry-Boüy et Saligny-le-Vif, pour Bourges, d'autre part, on ne négligera guère que les variations des attractions locales; ce qui ne peut produire, dans la discussion à laquelle nous allons nous livrer, que des erreurs peu sensibles.

Le point de départ des calculs géodésiques est Paris; or la longitude géodésique y ayant été prise égale à la longitude astronomique, la quantité ζ, équation (12), se réduit à $Z'_0 - Z_0$: d'après ce qui vient d'être dit, nous prendrons pour valeur de $Z'_0 - Z_0$ l'excès de l'azimut observé à Saint-Martin-du-Tertre sur l'azimut géodésique, excès égal à $+1'',8$. On aura donc

$$\zeta = +1'',8.$$

A l'aide des nombres que fournit le tableau précédent et de la valeur de ζ, nous allons former les équations de condition suivant la formule (14) : seulement, nous y supprimerons le terme en $\delta\alpha$. En effet, considérons des valeurs de α telles que $1:308,64 = 0,00324$ et $1:285 = 0,00351$, dont la première a été employée par le Dépôt de la Guerre, et la seconde est, suivant toute probabilité, supérieure à l'aplatissement réel; $\delta\alpha$ sera un nombre moindre que $0,0003$: il est facile de s'assurer qu'en négligeant le terme en $\delta\alpha$, l'erreur commise n'excédera en aucun point $0'',02$ à $0'',03$, quantités négligeables quand on s'arrête aux dixièmes de seconde.

Équations de condition indépendantes des effets des attractions locales.

Paris	à Brest	$-13'',1 =$	$-0,0043 \cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0$	$-0,0789 \delta L_0$
	à Strasbourg	$+2,5 =$	$-0,0022$	$+0,0624$
	à Bourges	$-12,8 =$	$-0,0308$	$+0,0024$
	à Rodez	$-25,6 =$	$-0,0782$	$+0,0030$
	à Carcassonne ...	$-33,6 =$	$-0,0980$	$+0,0002$

A la simple inspection de ces équations, on aperçoit que des corrections tout à fait improbables de 100″ laisseraient encore des erreurs hors de proportion avec celles des observations, en exceptant toutefois l'équation qui se rapporte à la station de Strasbourg.

On en conclut que la seule partie de ces deux chaînes où ne se révèle aucune erreur sensible est la partie orientale du parallèle de Paris, et que la partie occidentale du même parallèle, ainsi que la partie considérée de la méridienne de Dunkerque, sont affectées d'erreurs inadmissibles [*].

Néanmoins, poursuivons la résolution des équations, comme si l'on pouvait compter, au moins approximativement, sur la valeur des inconnues.

On déduit d'abord des équations précédentes

$$\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0 = +341'' + 0,0197\, \delta L_0,$$

et la substitution de cette valeur dans les mêmes équations conduit aux suivantes :

Brest	$-11'',5 =$	$-0,0790\, \delta L_0$
Strasbourg	$+3,2 =$	$+0,0624$
Bourges	$-2,3 =$	$+0,0018$
Rodez	$+1,1 =$	$+0,0015$
Carcassonne	$-0,2 =$	$-0,0017$

[*] Les erreurs admissibles peuvent, d'après les erreurs des sommes des angles des triangles, être évaluées à 2″ à 3″ pour les trois premières équations, 3″ à 4″ pour la quatrième, 4″ à 5″ pour la dernière.

De celle-ci on tire

$$\delta L_0 = +109'' = +1'49,$$

et les erreurs que laissent les équations se réduisent à

$$-2'',9, \quad -3'',6, \quad -2'',5, \quad +0'',9, \quad -0'',4.$$

On trouve encore

$$\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0 = +343'';$$

d'où

$$\delta \mathfrak{L}_0 = +521'' = +8'41''.$$

Enfin l'équation (15) donne

$$\delta Z_0 = -391'' = -6'31''.$$

La valeur de $\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0$ représenterait, si elle était admissible, la composante des attractions locales à Paris, dans le sens perpendiculaire au méridien : sa valeur positive exprime que l'origine des longitudes géodésiques devrait être reportée à l'est de l'Observatoire de Paris : la valeur de δL_0 représenterait, à la correction près de la latitude astronomique, la composante des attractions locales dans le sens du méridien.

Hâtons-nous de déclarer que de telles valeurs ne se justifient par aucune analogie, et que leur absurdité montre précisément l'existence d'erreurs dans les parties déjà désignées des deux chaînes.

La possibilité de satisfaire numériquement aux équations précédentes, à de faibles erreurs près, semble indiquer que les erreurs dans la région comprise entre Paris et Carcassonne sont systématiques : c'est précisément pour mettre ce caractère en évidence que nous avons achevé la résolution.

En ne considérant que cette partie de la méridienne de Dunkerque, il n'était pas même nécessaire d'achever les calculs; car les équations qui ne contiennent plus que l'inconnue δL_0 sont satisfaites d'assez près, en prenant δL_0 quelconque entre des limites de $\pm 200''$.

On sait que Delambre, pour réaliser l'accord des bases de Melun et de Perpignan, a appliqué des corrections aux angles des triangles; mais ces corrections sont très-faibles et ne paraissent pas susceptibles

de produire un accroissement bien considérable des erreurs systématiques de longitude et d'azimut.

Dans le Mémoire présenté le 2 mars 1866 à l'Académie des Sciences, nous n'avions pu affirmer l'existence des erreurs de la méridienne de Dunkerque qu'entre Paris et Bourges d'une part, et entre Rodez et Carcassonne d'autre part; c'est qu'alors nous avions été obligé de suppléer, par le moyen d'une combinaison peu satisfaisante, au manque d'un azimut sur lequel on pût compter à Paris. Aujourd'hui que l'azimut du Panthéon nous a permis d'opérer avec plus d'exactitude, non-seulement nos prévisions se trouvent confirmées, mais nous les complétons en prouvant que la partie de la méridienne comprise entre Bourges et Rodez est elle-même vicieuse.

Se refuser à cette conclusion, ce serait admettre que les attractions locales à Paris produisent, dans le sens perpendiculaire au méridien, des écarts excédant plusieurs minutes. Rappelons d'ailleurs que la discordance actuelle des bases de Melun et de Perpignan prouve suffisamment l'existence de fortes erreurs dans la méridienne de Dunkerque. La rectification de ces erreurs amènera sûrement une réduction considérable dans les valeurs des corrections $\delta\mathcal{L}_0$, δZ_0 et δL_0.

Pour mettre hors de doute l'exactitude de la partie orientale du parallèle de Paris déjà rendue probable d'ailleurs par la concordance des bases de Melun et d'Ensisheim, il suffirait de déterminer la longitude et l'azimut en un point choisi au croisement de ce parallèle avec la méridienne de Sedan.

Si l'on veut circonscrire l'erreur qui paraît exister dans la partie occidentale du parallèle de Paris, on devra semblablement déterminer la longitude et l'azimut en un point pris au croisement du parallèle avec la méridienne de Bayeux. Ce travail serait d'autant plus intéressant que l'exactitude du parallèle entier est considérée comme établie par le degré de concordance des bases de Plouescat et d'Ensisheim. Enfin ce même parallèle offre un intérêt particulier, en ce qu'il est peut-être la seule chaîne de triangles où les observations des angles aient été faites pendant la nuit.

Il a sans doute été très-convenable d'interrompre le cours de nos déterminations astronomiques, pour examiner les conséquences que

l'on pouvait tirer de leur comparaison avec les déterminations géodésiques. Cette étude nous a effectivement conduit aux résultats qui viennent d'être présentés. Or, ces mêmes résultats nous paraissent indiquer très-clairement la marche à suivre pour contrôler les diverses chaînes de notre triangulation. Chaque nouvelle station choisie sur un méridien ou un parallèle comprenant déjà une autre station astronomique, nous permettra de prononcer sur l'existence d'erreurs dans la partie de chaîne comprise entre les deux stations, et l'on arrivera ainsi à contrôler sûrement l'exactitude des chaînes principales et à indiquer par suite les portions qui auraient besoin d'être recommencées.

Il est urgent qu'on prenne un parti à cet égard; car les repères ou bornes géodésiques disparaissent de jour en jour, et si l'on tarde trop, on se verra dans l'obligation de recommencer des opérations géodésiques que l'on trouverait peut-être irréprochables, si la conservation des repères permettait d'en constater l'exactitude.

SUR LES FONCTIONS DE STURM;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain.

§ I.

Soit

$$(1) \qquad V(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

une équation de degré n, dont les racines $a, b, c, \ldots, l$ sont supposées inégales, et posons généralement

$$R_i = V(x) \sum \frac{a^i}{x-a},$$

le signe $\sum$ s'appliquant à toutes les racines de l'équation. Les fonctions R_i, étant toutes de degré $n-1$, seront de la forme

$$R_i = \alpha_i x^{n-1} + \beta_i x^{n-2} + \ldots + \eta_i x^{n-r+1} + \theta_i x^{n-r} + \ldots + \lambda_i,$$

et l'identité

$$\sum \frac{a^i}{x-a} = x \sum \frac{a^{i-1}}{x-a} - \sum a^{i-1}$$

entraînant la relation suivante :

$$R_i = x R_{i-1} - V(x) \sum a^{i-1},$$

il faut que le terme en x^n se réduise à zéro, d'où

$$\alpha_{i-1} = \sum a^{i-1},$$

c'est-à-dire que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$ sont les sommes des puissances semblables de degré $0, 1, \ldots, i, \ldots$ des racines de l'équation (1).

Les fonctions R_0, $R_1, \ldots$, R_{n-1} se déduiront donc, par les relations

$$R_1 = x R_0 - \alpha_0 V, \quad R_2 = x R_1 - \alpha_1 V, \ldots, \quad R_{n-1} = x R_{n-2} - \alpha_{n-2} V,$$

de la première R_0, qui est connue, car on a

$$R_0 = \sum \frac{V}{x-a} = V_1 = \text{la dérivée de la fonction } V,$$

et le calcul se fera très-rapidement pour une équation numérique donnée, en usant de simplifications faciles à apercevoir.

§ II.

Cela posé, soient V_1, $V_2, \ldots$ V_{n-1}, V_n les fonctions de Sturm ; on a les relations

$$V_2 = V_1 Q_1 - V, \quad V_3 = V_2 Q_2 - V_1, \ldots, \quad V_r = V_{r-1} Q_{r-1} - V_{r-2} \ldots,$$

où Q_1, $Q_2, \ldots$, Q_{r-1} sont les quotients du premier degré en x, et où V_r est de degré $n - r$. Concevons qu'on élimine de la seconde équation V_2 au moyen de la première, de la troisième V_2 et V_3 au moyen des deux précédentes, et ainsi de suite : on arrivera à exprimer chacune des fonctions V_r au moyen de V et V_1 seulement, sous la forme

$$V_r = S_r V_1 - T_r V, \tag{2}$$

et l'on voit sans peine que la fonction S_r renfermera le terme $Q_1 Q_2 \ldots Q_{r-1}$, qui sera de degré plus élevé par rapport à x que tous les autres termes : donc S_r sera de degré $r - 1$, donc nous pouvons poser

$$S_r = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_{r-1} x^{r-1}.$$

D'autre part, si l'on décompose la fraction $\frac{V_r(x)}{V(x)}$ en fractions simples par la formule ordinaire, on obtient

$$\frac{V_r(x)}{V(x)} = \sum \frac{1}{x-a} \frac{V_r(a)}{V_1(a)},$$

et comme $V(a) = 0$, l'équation (2) donne

$$\frac{V_r(x)}{V(x)} = \sum \frac{S_r(a)}{x-a} = \sum \frac{q_0 + q_1 a + q_2 a^2 + \ldots + q_{r-1} a^{r-1}}{x-a},$$

d'où

$$V_r(x) = q_0 R_0 + q_1 R_1 + \ldots + q_{r-1} R_{r-1}.$$

Mais $R_0, R_1, \ldots R_{r-1}$ sont de degré $n-1$, tandis que V_r n'est que de degré $n-r$; il faut donc, en désignant par A_r le coefficient de la plus haute puissance de x dans la fonction V_r, que l'on ait les équations suivantes :

$$\begin{cases} q_0 \alpha_0 + q_1 \alpha_1 + \ldots + q_{r-1} \alpha_{r-1} = 0, \\ q_0 \beta_0 + q_1 \beta_1 + \ldots + q_{r-1} \beta_{r-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_0 \eta_0 + q_1 \eta_1 + \ldots + q_{r-1} \eta_{r-1} = 0, \\ q_0 \theta_0 + q_1 \theta_1 + \ldots + q_{r-1} \theta_{r-1} = A_r. \end{cases}$$

Tirons de ces équations les valeurs des coefficients q_i, et posons

$$N_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \eta_0 & \theta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \eta_1 & \theta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \ldots & \eta_{r-1} & \theta_{r-1} \end{vmatrix},$$

nous aurons immédiatement

$$q_i = \frac{A_r}{N_r} \frac{dN_r}{d\theta_i},$$

d'où

$$V_r = \frac{A_r}{N_r}\left(R_0 \frac{dN_r}{d\theta_0} + R_1 \frac{dN_r}{d\theta_1} + \ldots + R_{r-1} \frac{dN_r}{d\theta_{r-1}}\right)$$

$$= \frac{A_r}{N_r} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \eta_1 & R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \ldots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Observons ici 1° que $\frac{dN_r}{d\theta_{r-1}}$ n'est autre chose que N_{r-1}, et 2° que q_{r-1},

coefficient de la plus haute puissance de x dans S_{r-1}, ne peut être que le produit des coefficients de x dans $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{r-1}$, d'où l'on a

$$q_{r-1} = \frac{1}{A_1}\cdot\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{A_2}{A_3}\cdots\frac{A_{r-2}}{A_{r-1}} = \frac{1}{A_{r-1}},$$

par où l'équation

$$q_{r-1} = \frac{A_r}{N_r}\frac{dN_r}{d\theta_{r-1}} \quad \text{se réduit à celle-ci :} \quad \frac{A_r}{N_r} = \frac{1}{A_{r-1}N_{r-1}}.$$

Il suit de là que $\frac{A_r}{N_r}, \frac{A_{r-1}}{N_{r-1}}, \ldots, \frac{A_1}{N_1} = \frac{n}{n} = 1$ sont de même signe, c'est-à-dire positifs; on peut donc, dans la recherche du nombre de racines réelles de l'équation (1), faire abstraction de ces coefficients $\frac{A_r}{N_r}$ par lesquels les fonctions V_r sont multipliées, et qui ne changent pas leurs signes; on peut donc substituer aux fonctions de Sturm les fonctions

$$(3) \qquad X_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \eta_1 & R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \ldots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Mais il est clair que dans le développement de cette expression, les coefficients de $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^{n-r+1}$ se réduisent à zéro, comme déterminants qui ont deux colonnes égales; on peut donc supprimer ces termes dans les fonctions R_i, et la série des fonctions X_r, propres à déterminer le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$, prendra la forme

$$V(x), \quad X_1 = R_0 = \alpha_0 x^{n-1} + \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0,$$

$$X_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \lambda_1 \end{vmatrix}, \quad X_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 x^{n-3} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 x^{n-3} + \ldots + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

. . . .

$$X_n = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \ldots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}.$$

On voit que ces fonctions se composent fort simplement au moyen des seuls coefficients des fonctions R_i, et que, celles-ci une fois formées, on peut écrire immédiatement le coefficient d'une puissance quelconque des fonctions X_r, sans passer par aucun intermédiaire.

Nous venons de dire que l'on peut faire abstraction des coefficients positifs $\frac{A_r}{N_r}$ qui multiplient les fonctions sturmiennes; mais on peut aussi les calculer au moyen des coefficients α_i, $\beta_i, \ldots$, car la relation

$$\frac{A_r}{N_r} = \frac{1}{A_{r-1} N_{r-1}} = \frac{1}{A_{r-1}^2} \frac{A_{r-1}}{N_{r-1}}$$

donne celle-ci :

$$A_r = \frac{N_r}{A_{r-1}^2} \cdot \frac{1}{A_{r-2}^2} \cdots \frac{1}{A_1^2} = \frac{N_r}{(A_1 A_2 \ldots A_{r-1})^2},$$

et comme $A_1 = n$ est connu, on aura successivement A_2, $A_3, \ldots$.

§ III.

Montrons brièvement comment, en faisant usage des propriétés élémentaires des déterminants, on tire des formules ci-dessus les expressions des fonctions de Sturm données par plusieurs analystes. Pour cela, nous observerons que la relation

$$R_i = x R_{i-1} - \alpha_{i-1} V$$

entraîne les suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \beta_{i-1} - p_1 \alpha_{i-1}, \\ \beta_i &= \gamma_{i-1} - p_2 \alpha_{i-1}, \\ \gamma_i &= \delta_{i-1} - p_3 \alpha_{i-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_i &= \theta_{i-1} - p_{r-1} \alpha_{i-1}, \end{aligned}$$

d'où il suit que si dans le déterminant

$$X_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \eta_1 & R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \ldots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}$$

on ajoute aux termes de la seconde colonne ceux de la première multipliés par $-p_1$, aux termes de la troisième ceux de la première multipliés par $-p_2$, et ceux de la seconde transformée multipliés par $-p_1$, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière colonne, on arrivera facilement à l'expression

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_{r-2} & R_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots & \alpha_{r-1} & R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \alpha_r & \alpha_{r+1} \ldots & \alpha_{2r-3} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Mais d'autre part, si l'on pose

$$s_i = \sum a^i = \alpha_i, \quad u_i = \sum \frac{a^i}{x-a} = \frac{R_i}{V},$$

la formule précédente se réduit à

$$(4) \qquad X_r = V \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots & s_{r-2} & u_0 \\ s_1 & s_2 \ldots & s_{r-1} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-1} & s_r \ldots & s_{2r-3} & u_{r-1} \end{vmatrix},$$

ce qui est précisément la formule donnée par M. Cayley [*]. Réciproquement, on pourrait en déduire celle que nous avons établie d'abord.

Lorsque l'on veut exprimer les fonctions X_r au moyen des coefficients p_i de l'équation proposée, on doit observer que l'on a

$$\alpha_0 = n, \qquad \beta_0 = (n-1)p_1 \quad \gamma_0 = (n-2)p_2, \ldots,$$
$$\alpha_1 = -p_1, \quad \beta_1 = -2p_2, \qquad \gamma_1 = -3p_3, \ldots,$$

et on élimine tous les autres coefficients à l'aide de la loi de déduction.

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. XI, p. 297.

Prenons par exemple X_3 :

$$X_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ R_0 & R_1 & R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 - \alpha_0 p_1 & \beta_1 - \alpha_1 p_1 \\ \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 p_2 & \gamma_1 - \alpha_1 p_2 \\ R_0 & x R_0 - \alpha_0 V & x R_1 - \alpha_1 V \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \beta_1 \\ p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ V & R_0 & x R_0 & x R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 - \alpha_0 p_1 \\ p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 p_2 \\ p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 - \alpha_0 p_3 \\ V & R_0 & x R_0 & x^2 R_0 - \alpha_0 x V \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \\ p_1 & 1 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ p_2 & p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ p_3 & p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ x V & V & R_0 & x R_0 & x^2 R_0 \end{vmatrix},$$

d'où

$$X_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & n \\ p_1 & 1 & 0 & n & (n-1) p_1 \\ p_2 & p_1 & n & (n-1) p_1 & (n-2) p_2 \\ p_3 & p_2 & (n-1) p_1 & (n-2) p_2 & (n-3) p_3 \\ x V & V & V_1 & x V_1 & x^2 V_1 \end{vmatrix}.$$

La loi de formation des fonctions X_r se montre déjà suffisamment. On pourrait également exprimer les déterminants N_r directement au moyen des coefficients de l'équation proposée, par une marche semblable : ces formules sont tout à fait analogues à celles données par M. Cayley [*] et par M. Brioschi [**] pour remplir le même objet; elles ne sont d'ailleurs d'aucune utilité pour la formation des fonctions X_r sur une équation numérique donnée. On y voit aussi comment on pourrait former les fonctions S_r et T_r.

Reprenons maintenant l'expression (4) de X_r, en l'écrivant sous la

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 269

[**] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIII, p. 71; 1854.

forme

$$\frac{X_r}{V} = \begin{vmatrix} u_0 & -s_0 & -s_1 \ldots & -s_{r-2} \\ u_1 & -s_1 & -s_2 \ldots & -s_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r-1} & -s_{r-1} & -s_r \ldots & -s_{2r-3} \end{vmatrix},$$

et en nous rappelant que l'on a la relation

$$u_i = xu_{i-1} - s_{i-1}.$$

Ajoutons aux termes de la seconde colonne ceux de la première multipliés par x, aux termes de la troisième ceux de la seconde transformée multipliés par x, et ainsi de suite, il viendra

$$\frac{X_r}{V} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \ldots & u_{r-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 \ldots & u_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r-1} & u_r & u_{r+1} \ldots & u_{2r-2} \end{vmatrix}.$$

C'est sous cette forme que M. Hermite a obtenu, par une voie tout à fait nouvelle [*], les fonctions de Sturm. De là on déduit sans peine la transformation célèbre due à M. Sylvester. En effet, on a posé

$$u_i = \sum \frac{a^i}{x-a},$$

et en ayant égard à une propriété connue des déterminants, on donne à l'équation ci-dessus la forme

$$\frac{X_r}{V} = \mathrm{S} \begin{vmatrix} \frac{1}{x-a} & \frac{b}{x-b} \ldots & \frac{g^{r-1}}{x-g} \\ \frac{a}{x-a} & \frac{b^2}{x-b} \ldots & \frac{g^r}{x-g} \\ \frac{a^2}{x-a} & \frac{b^3}{x-b} \ldots & \frac{g^{r+1}}{x-g} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a^{r-1}}{x-a} & \frac{b^r}{x-b} \ldots & \frac{g^{2r-2}}{x-g} \end{vmatrix},$$

---

[*] *Programme détaillé d'un cours d'Arithmétique*, par Roguet, note VI.

S désignant une somme de déterminants semblables obtenus en remplaçant successivement a, b, g,... par toutes les racines de l'équation (1), et négligeant, comme nuls, ceux où une même racine figure dans deux colonnes. On tire de là

$$\frac{X^r}{V} = \mathsf{S} \begin{vmatrix} 1 & 1\ldots & 1 \\ a & b\ldots & g \\ a^2 & b^2\ldots & g^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{r-1} & b^{r-1}\ldots & g^{r-1} \end{vmatrix} \times \frac{a^0 b^1 c^2 \ldots g^{r-1}}{(x-a)(x-b)\ldots(x-g)},$$

mais dans cette somme désignée par S on peut grouper ensemble tous les termes où entrent les mêmes racines a, b,..., g, ces termes ayant le même dénominateur $(x-a)(x-b)\ldots(x-g)$, et le même déterminant facteur, au signe près; on voit alors sans peine que la somme des termes

$$\pm a^0 b^1 c^2 \ldots g^{r-1}$$

se réduira à ce même déterminant, d'où résulte l'équation

$$\frac{X_r}{V} = \mathsf{S} \begin{vmatrix} 1 & 1\ldots & 1 \\ a & b\ldots & g \\ a^2 & b^2\ldots & g^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{r-1} & b^{r-1}\ldots & g^{r-1} \end{vmatrix}^2 \times \frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-g)},$$

qui n'est autre qu'une équation de M. Cayley [*]. Le signe S se rapporte maintenant à toutes les combinaisons différentes des n racines, prises r à r.

Enfin rappelons-nous que le déterminant dont le carré figure dans cette formule est égal, en vertu d'un théorème connu, à

$$\pm(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(b-c)\ldots(b-g)\ldots(f-g),$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI.

c'est-à-dire au produit des différences des racines $a, b, \ldots, g$, prises deux à deux; et en faisant cette substitution, il vient

$$X_r = V\,\mathbf{S}\frac{(a-b)^2(a-c)^2\ldots(f-g)^2}{(x-a)(x-b)\ldots(x-g)}.$$

On reconnaît là les formules de M. Sylvester [*]. Ainsi nos fonctions X_r ne sont autre chose que les fonctions de ce géomètre.

§ IV.

Il résulte évidemment de la formule de M. Sylvester, comme Sturm l'a fait voir, que la dernière fonction X_n se réduit au produit des carrés des différences des n racines $a, b, \ldots, l$ de l'équation (1), ou au *dernier terme* H *de l'équation aux carrés des différences.* On a donc, d'après nos formules,

$$(5) \qquad H = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \ldots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}$$

expression remarquable de ce dernier terme au moyen des coefficients des fonctions $R_0, R_1, \ldots, R_{n-i}$.

Appliquons ce procédé de formation à l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

On trouve immédiatement

$$R_0 = 3x^2 + 2px + q, \quad R_1 = -px^2 - 2qx - 3r,$$
$$R_2 = (p^2 - 2q)x^2 + (pq - 3r)x + pr,$$

d'où

$$H = \begin{vmatrix} 3 & -p & p^2 - 2q \\ 2p & -2q & pq - 3r \\ q & -3r & pr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & p & 2q \\ 2p & 2q & pq + 3r \\ q & 3r & 2pr \end{vmatrix},$$

[*] *Philosophical Transactions*, 1853, III. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 368.

d'où

$$H = 18pqr - 27r^2 + p^2q^2 - 4p^3r - 4q^3.$$

De même, pour l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned}
R_0 &= 4x^3 + 3px^2 + 2qx + r,\\
R_1 &= -px^3 - 2qx^2 - 3rx - 4s,\\
R_2 &= (p^2 - 2q)x^3 + (pq - 3r)x^2 + (pr - 4s)x + ps,\\
R_3 &= [(pq - 3r) - p(p^2 - 2q)]x^3 + [(pr - 4s) - q(p^2 - 2q)]x^2,\\
&\quad + [ps - r(p^2 - 2q)]x - s(p^2 - 2q),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en appliquant la forme (5) et en faisant quelques simplifications évidentes,

$$H = - \begin{vmatrix} 4 & p & 2q & 3r \\ 3p & 2q & pq + 3r & 2pr + 4s \\ 2q & 3r & 2pr + 4s & 3ps + qr \\ r & 4s & 3ps & 2qs \end{vmatrix},$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à développer ce déterminant.

Si l'on compare cette méthode pour calculer le dernier terme de l'équation aux différences avec les procédés antérieurement donnés (SERRET, *Algèbre supérieure*, 2[e] édition, p. 30 et 452), on trouvera sans doute qu'elle est plus facile à retenir, plus rapide, qu'elle s'applique immédiatement à une équation numérique donnée, et qu'enfin elle a l'avantage de conduire directement à l'expression du terme H pour une équation de degré n, sans qu'il soit nécessaire de passer par toutes les équations de degré inférieur à n.

Sur la fonction numérique qui exprime pour un déterminant négatif donné le nombre des classes de formes quadratiques dont un au moins des coefficients extrêmes est impair;

PAR M. J. LIOUVILLE.

J'ai présenté sous ce titre à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 25 juin 1866, une Note que je crois bon de reproduire textuellement d'après les *Comptes rendus*.

« **1**. Je veux surtout m'occuper ici de la fonction numérique $F(k)$ qui exprime le nombre des classes de formes (binaires) quadratiques, primitives ou non, de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Comme ces formes sont les seules qui puissent représenter des nombres impairs, je prendrai la liberté de les désigner elles-mêmes sous le nom de *formes impaires*, et de dire en conséquence que $F(k)$ est le nombre des classes de formes quadratiques impaires, primitives ou non, de déterminant $-k$. Je ne considérerai que des valeurs positives de k. Ceci convenu, j'entre en matière; car il serait inutile de rappeler au lecteur les recherches de M. Kronecker, du P. Joubert et de notre ingénieux et profond confrère M. Hermite sur le même sujet. Leurs savants travaux sont connus de tous les géomètres. Je crois avoir à mon tour ajouté beaucoup de résultats nouveaux à ceux qu'ils ont obtenus, et cela sans sortir des procédés purement arithmétiques, au moyen de certaines *formules générales* que j'ai données dans le *Journal de Mathématiques* et dont la démonstration repose sur l'Algebre la plus simple [*]. Je

[*] Un habile géomètre italien, M. Piuma, s'aidant de quelques indications recueillies çà et là dans le *Journal de Mathématiques*, a donné des formules de mes cinq premiers articles, et de cinq autres, dont les numéros varient de sept à onze, des démonstrations qui remplissent les conditions que je m'étais imposées; ces démonstra-

vais me borner, bien entendu, à énoncer un petit nombre de théorèmes; le Mémoire complet paraîtra dans un autre recueil.

» 2. Soient m un entier donné, impair et positif; α un entier positif ou nul, donné aussi; i un entier impair variable qui prenne les valeurs successives

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ \omega,$$

ω étant le plus grand entier impair pour lequel on continue à avoir

$$2^{\alpha+2}m - \omega^2 > 0;$$

il est clair que les entiers

$$2^{\alpha+2}m - i^2$$

sont tous $\equiv 3 \pmod{4}$; mais ils sont $\equiv 3 \pmod{8}$ quand $\alpha = 0$, $\equiv 7 \pmod{8}$ quand $\alpha > 0$.

» On sait que dans les conditions indiquées, l'on a

$$\sum F(2^{\alpha+2}m - i^2) = 2^\alpha \sum d - \sum \mathrm{D},$$

équation dans laquelle d représente un quelconque des diviseurs de m, et D un quelconque des diviseurs de $2^\alpha m$ pour lesquels

$$2^\alpha m = \mathrm{D}(\mathrm{D} + \Delta),$$

Δ étant un entier impair. Les diviseurs D n'existent que quand α est > 0; si $\alpha = 0$, les termes où on les fait figurer devront être supprimés.

» A la formule connue que je viens de rappeler, j'ajoute d'abord celle-ci :

$$(1)\qquad \sum i^2 F(2^{\alpha+2}m - i^2) = 2^\alpha m\left(2^\alpha \sum d - \sum \mathrm{D}\right) - \sum(\mathrm{D}^3),$$

qui n'a pas besoin d'explications nouvelles.

---

tions ne diffèrent pas au fond des miennes, encore inédites, et peuvent en tenir lieu, du moins quant aux formules dont M. Piuma s'est occupé.

» Mais voici une autre équation non moins curieuse. Considérez l'ensemble des classes de formes quadratiques impaires qui répondent aux divers déterminants négatifs fournis par l'expression

$$i^2 - 2^{\alpha+2} m.$$

Prenez successivement les représentantes de ces classes et pour chacune d'elles cherchez les deux plus petits entiers impairs a, a' qu'elle exprime proprement, a' étant supposé $> a$, puis calculez la somme

$$\sum a(a'-a)$$

des produits $a(a'-a)$ pour la totalité des formes indiquées. Vous aurez toujours

$$(2) \qquad \sum a(a'-a) = 2^{\alpha+1} m \left(2^\alpha \sum d - \sum \mathrm{D}\right) + 2\sum (\mathrm{D}^3).$$

» On voit que

$$\sum a(a'-a) + 2\sum i^2 F(2^{\alpha+2} m - i^2) = 2^{\alpha+2} m \sum F(2^{\alpha+2} m - i^2);$$

mais je ne m'arrête pas à ces détails.

» **3**. Soit m un nombre impair donné, positif et de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires

$$12g+7, \quad 12g+11;$$

désignons par i un entier impair variable qui prenne les valeurs successives

$$1, 3, 5, \ldots, \omega,$$

ω étant le plus grand entier impair pour lequel on continue à avoir

$$2m - 3\omega^2 > 0;$$

enfin posons

$$m = d\delta,$$

d représentant un quelconque des diviseurs de m et δ le diviseur conjugué à d.

» On aura

$$(3) \qquad \sum F(2m-3i)^2 = \frac{1}{8}\left[3+\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d.$$

Nous avons employé au second membre et nous emploierons encore ci-après le signe

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

de Legendre, avec la signification plus étendue que lui attribue Jacobi. On a

$$\left(\frac{m}{3}\right) = 1$$

quand

$$m = 12g + 7,$$

mais

$$\left(\frac{m}{3}\right) = -1$$

quand

$$m = 12g + 11.$$

La formule (3) est susceptible d'une grande extension.

» 4. Soient m un nombre impair donné, positif, premier à 5, quelconque du reste; α, β des entiers positifs ou nuls, donnés aussi; i un entier impair variable qui prenne les valeurs successives

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ \omega,$$

ω étant le plus grand entier impair pour lequel on continue à avoir

$$8.2^\alpha 5^\beta m - 5\omega^2 > 0;$$

enfin d un quelconque des diviseurs de m et δ le diviseur conjugué à d.

» On aura

$$(4)\quad \sum F(8.2^\alpha 5^\beta m - 5i^2) = 2^{\alpha-2}\left[5^{\beta+1} - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{5}\right)\right]\sum\left(\frac{5}{\delta}\right)d.$$

Cette formule est une de celles qui se rapportent au nombre 5, comme la précédente est une de celles qui se rapportent au nombre 3.

» 5. Soient m un entier impair donné, positif et de la forme linéaire $24g + 11$; s un entier variable qui prenne les valeurs successives

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ \omega,$$

ω étant le plus grand entier pour lequel on continue à avoir

$$m - 48s^2 > 0.$$

» On aura

$$(5)\qquad F(m) + 2\sum F(m - 48s^2) = \frac{1}{4}\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d.$$

Voilà encore une des formules qu'on peut regarder comme appartenant au nombre 3.

» 6. Soit m un entier impair donné, positif et $\equiv 3 \pmod{4}$, en sorte que l'on ait

$$m = 4g + 3.$$

Soit ensuite s un entier variable prenant les valeurs successives

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ g;$$

posons

$$g - s = t,$$

en sorte que quand s croît de 0 à g, t décroisse de g à 0. Enfin, désignons par d un quelconque des diviseurs de m et par δ le diviseur conjugué à d, puis faisons, suivant notre usage,

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2 = \rho_2(m).$$

On aura

$$(6) \qquad \sum F(8s+3)\,F(8t+3) = \frac{1}{8}\rho_2(m).$$

» Je m'arrête, n'ayant eu l'intention de donner ici qu'un léger aperçu de mes recherches. Peut-être ajouterai-je quelques autres formules dans des communications subséquentes, mais sans jamais songer à épuiser la longue série de celles que j'espère publier prochainement dans le *Journal de Mathématiques.* »

QUESTION DE MATHÉMATIQUES

Proposée comme sujet de prix par la Société royale danoise des Sciences.

« Le potentiel peut être ramené à une forme plus générale, lorsqu'on considère la variable μ, dans la fonction $\Sigma \frac{\mu}{r}$, comme une fonction de $t - \frac{r}{a}$, t étant une nouvelle variable et a une constante. Comme le potentiel ainsi généralisé pourra recevoir des applications bien plus étendues, la Société désire qu'outre un exposé des principales propositions connues jusqu'ici relativement à cette fonction, on lui présente une recherche sur la même fonction sous la forme indiquée ci-dessus.

» Les pièces pour le concours peuvent être écrites en latin, en français, en anglais, en allemand, en suédois ou en danois. Elles doivent être remises avant la fin du mois d'octobre 1868 au secrétaire de la Société, M. le Professeur J. Japetus Sm. Steenstrup. Les Mémoires ne doivent pas porter le nom de l'auteur mais une devise, et être accompagnés d'un billet cacheté muni de la même devise, et renfermant le nom, la profession et l'adresse de l'auteur. Les membres de la Société qui demeurent en Danemark ne prennent point part au concours. La récompense accordée pour une réponse satisfaisante à la question proposée, est la médaille d'or de la Société, d'une valeur de 50 ducats danois. »

Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations;

PAR M. CAMILLE JORDAN,
Ingénieur des Mines.

« MONSIEUR,

» J'ai l'honneur de vous adresser, ainsi que vous avez bien voulu m'y engager, un extrait de mon Mémoire sur la résolution algébrique des équations. Je vous prie de me permettre d'y ajouter quelques indications sommaires sur le but et la portée de ces recherches.

» Galois a démontré dans un Mémoire célèbre, et dont nous vous devons la publication, que chaque équation algébrique est caractérisée par un certain groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses principales propriétés : proposition capitale qui fait dépendre la théorie tout entière des équations de celle des substitutions.

» Dans la suite du même Mémoire, Galois passe au cas spécial des équations solubles par radicaux, et trouve un caractère général auquel on peut reconnaître les groupes qui correspondent à de semblables équations. Cela fait, il s'agissait de partir de ce critérium pour construire ces groupes explicitement.

» Après avoir traité cette nouvelle question dans le cas simple où les équations cherchées sont de degré premier, Galois a abordé le cas beaucoup plus difficile où ce degré est quelconque. Il a partagé les équations irréductibles en deux grandes classes, qu'il nomme équations *primitives* et équations *non primitives;* puis il a énoncé à l'égard des premières les deux théorèmes suivants :

» 1° Le degré de toute équation primitive et soluble par radicaux est une puissance exacte d'un nombre premier.

» 2° Les substitutions de son groupe sont toutes linéaires.

» Les démonstrations de ces deux propositions sont perdues ; il n'en reste que quelques lambeaux sans suite, dont la restitution semble impossible.

» Mes recherches actuelles ont eu pour but et pour résultat la solution complète de la question ainsi ébauchée. Après avoir transformé le critérium de Galois de manière à en faciliter l'application, j'ai retrouvé sans beaucoup de peine les deux propositions de Galois auxquelles j'ai ajouté la suivante :

» 3° Le groupe de chaque équation irréductible non primitive, soluble par radicaux et de degré m, correspond à une certaine décomposition du nombre m en facteurs dont chacun soit une puissance de nombre premier. Soit $m = p^n p'^{n'} \ldots$ une de ces décompositions, on pourra écrire immédiatement les groupes des équations solubles par radicaux et correspondantes à cette décomposition, dès qu'on connaîtra les groupes des équations primitives et solubles par radicaux pour chacun des degrés p^n, $p'^{n'}$, etc.

» Le problème initial : *Déterminer les groupes de toutes les équations irréductibles, solubles par radicaux et de degré* m (que nous appellerons pour abréger le *problème* A), est ainsi ramené au suivant :

» Problème B. — *Déterminer les groupes de substitutions linéaires qui caractérisent des équations primitives, solubles par radicaux et d'un degré tel que* p^n.

» J'arrive ensuite au résultat suivant.

» Posons

$$n = \lambda\nu\pi^{\sigma}\pi_1^{\sigma_1}\ldots,$$

λ et ν étant des entiers et $\pi, \pi_1, \ldots$ des nombres premiers qui divisent $p^{\nu} - 1$: chacun des groupes qui font l'objet du problème B correspond à une décomposition de cette sorte, et pourra être formé sans difficulté si l'on connaît :

» 1° Les groupes des équations irréductibles et solubles par radicaux pour le degré λ ;

» 2° Certains groupes spéciaux de substitutions linéaires, caractérisant des équations primitives et solubles par radicaux de de-

grés $\pi^{2\sigma}$, $\pi_1^{2\sigma_1}$, etc., et tels, que les coefficients de leurs substitutions soient liés entre eux par certaines relations exactement analogues à celles auxquelles satisfont les systèmes de seize lettres considérés par M. Hermite dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes.

» Si l'on appelle *problème* C celui qui consiste à déterminer les groupes spéciaux ci-dessus, on voit que le problème B se ramène aux deux problèmes A et C.

» Posons

$$\sigma = \lambda' \nu' \pi'^{\sigma'} \pi_1'^{\sigma_1'} \ldots,$$

λ', ν' étant des entiers et π', $\pi'_1, \ldots$, des nombres premiers qui divisent $\pi^{2\nu'} - 1$. Je démontre que tout groupe spécial répondant à une équation de degré $\pi^{2\sigma}$ correspond à une décomposition de cette sorte, et pourra être formé sans difficulté si l'on connaît :

» 1° Les groupes des équations irréductibles et solubles par radicaux pour le degré λ';

» 2° Les groupes spéciaux pour les degrés $\pi'^{2\sigma'}$, $\pi_1'^{2\sigma_1'}$, etc.

» Ainsi, les trois problèmes A, B, C sont liés entre eux de telle sorte que la solution de chacun d'eux, pour un degré donné, se ramène à celle des mêmes problèmes pour des degrés inférieurs. On pourra donc les résoudre pour un degré quelconque en abaissant progressivement ce degré par des réductions successives, jusqu'à ce qu'il soit assez petit pour que la solution devienne intuitive. L'abaissement est extrêmement rapide; ainsi quatre à cinq réductions au plus suffiront pour tout nombre inférieur au carré d'un milliard.

» Les groupes des équations solubles par radicaux étant ainsi formés pour un degré quelconque donné, il sera aisé de s'assurer si une équation numérique donnée est soluble ou non par radicaux. Il suffira, en effet, de s'assurer si son groupe est un de ceux que nous avions déterminés : ce qu'on reconnaîtra à cette circonstance, que l'équation auxiliaire d'où dépend une fonction de ses racines invariable par les substitutions du groupe proposé et variable par toute autre substitution, aura une racine rationnelle.

» On doit reconnaître que ce critérium, satisfaisant au point de vue

théorique, conduirait généralement dans l'application à des calculs impraticables; mais il existe des équations fort intéressantes (dans la théorie des fonctions elliptiques, par exemple), dont les coefficients ne sont pas immédiatement donnés et se déterminent avec beaucoup moins de facilité que le groupe lui-même. Dans ces circonstances-là, il est clair que l'inconvénient signalé n'existe pas.

» D'ailleurs, la méthode ci-dessus a un avantage bien plus considérable qu'une application plus ou moins facile à telle ou telle équation numérique, en ce qu'elle permet d'*énumérer* et de *classer* immédiatement, pour chaque degré donné, les divers types généraux d'équations solubles par radicaux, et de déterminer pour chacun d'eux le nombre et le degré des extractions de racine à opérer pour le résoudre.

» Galois avait annoncé que, sauf de rares exceptions, toutes les équations d'un degré donné, solubles par radicaux, appartenaient à un même type; mais cette propriété, vraie pour les équations de degré premier, est inexacte en général. Cela résulte immédiatement de notre manière de traiter le problème : on peut distinguer, en effet, autant de *classes* de types résolubles pour le degré m qu'il existe de manières de décomposer m en facteurs p^n, $p'^{n'}$,.... De même, on peut distinguer autant de *classes* de types primitifs et résolubles du degré p^n qu'il existe de décompositions de la forme $n = \lambda\nu\pi^\sigma\pi_1^{\sigma_1}$, etc.

» Les types résolubles de degré m et de la même classe $m = p^n p'^{n'}\ldots$ peuvent être repartis en *sous-classes*, suivant les classes auxquelles appartiennent les types primitifs et résolubles de degré p^n, $p'^{n'}$, etc.,..., dont les groupes servent à construire leurs groupes respectifs, etc.....

» En multipliant ainsi les subdivisions, on obtient un système complet de classification des types d'équations solubles par radicaux. Mais pour que cette classification soit juste, il est nécessaire que tous les types obtenus par notre méthode soient distincts. J'établis, en effet, qu'il en est ainsi, sauf un petit nombre d'exceptions que je détermine, et par suite desquelles certaines classes bien spécifiées doivent être rejetées comme faisant double emploi avec d'autres.

» Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mon profond respect.

» CAMILLE JORDAN. »

MÉMOIRE

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS;

Par M. Camille JORDAN,
Ingénieur des Mines.

EXTRAIT.

DÉFINITIONS ET NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

On nomme *substitution* l'opération qui consiste à intervertir l'ordre d'un certain nombre de choses a, b, c....

On désigne par AB la substitution qui produit le même effet que les deux substitutions A et B, exécutées successivement : par 1 la substitution qui laisse chaque chose à sa place.

La suite des substitutions 1, A, A^2,... a tous ses termes différents jusqu'à un terme A^μ qui se réduit à 1 et à partir duquel les autres se reproduisent périodiquement. Le nombre μ est dit l'*ordre* de la substitution A.

Un système de substitutions A, B, C,... forme un *groupe* si le produit AB de deux quelconques d'entre elles fait lui-même partie du système.

Tout groupe contient la substitution 1 : car s'il contient A, il contiendra par définition celle des puissances de A qui se réduit à l'unité. Tout groupe qui contient des substitutions autres que 1 en contient une d'ordre premier; car soit A une des substitutions du groupe, μ son ordre, p un diviseur premier de μ : $A^{\frac{\mu}{p}}$ sera évidemment d'ordre p et appartiendra au groupe.

L'*ordre* d'un groupe est le nombre de ses substitutions.

Soient A, B, C,... un certain nombre de substitutions; formons tous les produits possibles que l'on peut faire avec les facteurs A, B, C,..,

pris chacun un nombre quelconque de fois et dans un ordre quelconque : le groupe ainsi obtenu sera dit le groupe *dérivé* de A, B, C,..., et nous le représenterons par la notation (A, B, C,...).

La substitution $M^{-1}AM$ est dite la *transformée de* A *par* M [*]. Si $M^{-1}AM = A$, d'où $AM = MA$, les substitutions A et M sont dites *échangeables* entre elles.

On a identiquement $M^{-1}AM.M^{-1}BM = M^{-1}ABM$.

Donc le produit de deux substitutions a pour transformée le produit de leurs transformées.

On en conclut aisément :

1° Que les transformées des substitutions d'un groupe (A, B, C,...) par M forment un groupe qu'on peut appeler le groupe *transformé* de (A, B, C,...) par M. Si ce groupe se confond avec le groupe (A, B, C,...), ce groupe et la substitution M sont dits réciproquement *permutables* [**].

2° Que si deux substitutions sont échangeables, leurs transformées par une substitution quelconque le seront.

3° Que si une substitution est permutable à un groupe, leurs transformés par une substitution quelconque seront permutables.

Un groupe est dit *transitif* si ses substitutions permettent d'amener une des lettres a, b,... à la place de chacune des autres.

Un groupe transitif est dit *primitif* ou non, suivant qu'il sera ou non impossible d'y répartir les lettres en systèmes tels que chacune des substitutions du groupe remplace les diverses lettres de chaque système par les lettres d'un même système.

Ces définitions posées, les deux théorèmes de Galois qui nous serviront de point de départ peuvent être énoncés ainsi qu'il suit :

---

[*] On vérifie aisément que si A remplace une lettre a par une autre lettre b, et si M remplace respectivement a et b par a' et b', $M^{-1}AM$ remplace a' par b'. Nous aurons à faire un fréquent usage de cette remarque.

[**] Si M est permutable au groupe (A, B, C,...), toute substitution du groupe (A, B, C,..., M) peut être mise à volonté sous l'une des deux formes $M^{\alpha}N$ ou $N'M^{\alpha}$, N et N' étant des substitutions du groupe (A, B, C,...). Car la substitution M^2AM par exemple est identique à $M^3.M^{-1}AM = M^3.N$ en remarquant que $M^{-1}AM$ fait partie du groupe. De même $M^2AM = M^2AM^{-2}.M^3 = N'.M^3$.

THÉORÈME I. — *Soit* $F(x) = 0$ *une équation algébrique quelconque à coefficients rationnels : il existe un certain groupe de substitutions entre ses racines tel, que toute fonction rationnelle des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, ait une valeur rationnelle, et réciproquement.*

THÉORÈME II. — *Pour qu'une équation* $F(x) = 0$ *à coefficients rationnels soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que son groupe puisse s'obtenir en combinant ensemble une suite de substitutions* 1, A, B, C,... *telles, que chacune d'elles soit permutable au groupe dérivé des précédentes.*

Nous nommerons, pour abréger, groupes *résolubles* ceux qui caractérisent des équations solubles par radicaux.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

1. Soit 1, A, B, C,... l'échelle des substitutions qui forment le groupe d'une équation résoluble, et dont chacune est permutable au groupe dérivé des précédentes. Si l'on forme les puissances successives d'une de ces substitutions, telle que C, on arrivera à en trouver une C^μ égale à l'unité, ou à quelque autre des substitutions du groupe (1, A, B) dérivé des précédentes.

On peut supposer μ *premier :* car si $\mu = d\delta$, on pourrait remplacer l'échelle 1, A, B, C,... par la suivante 1, A, B, C^δ, C,... qui contient un échelon de plus, et jouit évidemment encore de la propriété fondamentale que chaque substitution est permutable au groupe dérivé des précédentes.

2. THÉORÈME I. — *Soit* L *un groupe résoluble. Si* λ, λ'... *sont des substitutions qui puissent être liées idéalement avec celles de* L *par une corrélation telle:* 1° *qu'à chaque substitution de* L *corresponde une seule substitution* λ; 2° *que le produit* ll' *de deux substitutions quelconques de* L, l *et* l', *ait pour corrélative le produit* $\lambda\lambda'$ *des substitutions*

λ et λ' respectivement corrélatives de l et l', le groupe dérivé de λ, λ',... sera résoluble.

Formons en effet l'échelle 1, l, l', l'',... génératrice du groupe L. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces substitutions forment l'échelle d'un groupe résoluble sont les suivantes :

$$l'^{-1}\,l\,l' = \text{une puissance de } l, \text{ soit } l^{\alpha};$$
$$\left.\begin{array}{l} l''^{-1}\,l\,l'' = \\ l''^{-1}\,l'\,l'' = \end{array}\right\} \text{des substitutions dérivées de } l \text{ et } l', \text{ telles que } \left\{\begin{array}{l} l^{\alpha_1}\,l'^{\beta_1}; \\ l^{\alpha'_1}\,l'^{\beta'_1}; \end{array}\right.$$
. . . .

Si l'on prend les substitutions corrélatives de celles qui entrent dans les deux membres de ces égalités, on aura les relations suivantes :

$$\lambda'^{-1}\lambda\,\lambda' = \lambda^{\alpha},$$
$$\lambda''^{-1}\lambda\,\lambda'' = \lambda^{\alpha_1}\lambda'^{\beta_1},$$
$$\lambda''^{-1}\lambda'\lambda'' = \lambda^{\alpha'_1}\lambda'^{\beta'_1},$$
. . . .

qui montrent que 1, λ, λ', λ'',... forment l'échelle d'un groupe résoluble.

5. Théorème II. — *Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau (ou groupe partiel) de substitutions contenu dans le groupe résoluble* L *et permutable à toutes ses substitutions, on pourra toujours choisir l'échelle des substitutions* 1, A, B, C,... *dont l'adjonction successive reproduit le groupe* L *de telle sorte que les substitutions $\mathfrak{F}$ soient les premières introduites.*

Supposons en effet que le groupe dérivé de 1, A, B ne contienne aucune substitution du faisceau (sauf l'unité qu'il contient nécessairement), mais que l'adjonction d'une nouvelle substitution C en introduise une. C étant permutable au groupe (1, A, B), cette substitution pourra être ramenée à la forme $C^{\gamma}M$, M étant une substitution du groupe (1, A, B).

1° *Aucune des substitutions introduites avec* C, *à l'exception de* $C^{\gamma}M$ *et de ses puissances, ne fera partie du faisceau $\mathfrak{F}$.* En effet, considérons l'une d'elles : on peut la mettre sous la forme $C^{\delta}M_1$, où M_1 désigne une substitution du groupe (1, A, B).

Or on a généralement

$$C^{\delta}M_1(C^{\gamma}M)^a = C^{a\gamma+\delta}M_2,$$

M_2 étant encore une substitution du groupe (1, A, B). On sait d'ailleurs qu'il existe une puissance C^{μ} de C qui fait également partie de ce groupe, et que l'exposant μ est premier. On pourra donc déterminer le paramètre a de telle sorte que

$$a\gamma + \delta \equiv 0 \pmod{\mu};$$

et la substitution $C^{\delta}M_1.(C^{\gamma}M)^a$ fera elle-même partie du groupe (1, A, B). D'ailleurs elle fera partie du faisceau $\mathfrak{F}$, si $C^{\delta}M$ en fait partie ainsi que $C^{\gamma}M$; et comme par hypothèse ce faisceau n'a aucune substitution commune avec le groupe (1, A, B), sauf l'unité, on aura

$$C^{\delta}M_1(C^{\gamma}M)^a = 1, \quad \text{d'où} \quad C^{\delta}M_1 = (C^{\gamma}M)^{-a}.$$

2° *Toutes les substitutions* (1, A, B, C) *sont permutables au faisceau f dérivé de* $C^{\gamma}M$ *et de ses puissances.* En effet, le faisceau f', transformé de f par l'une quelconque de ces substitutions, doit faire partie à la fois du faisceau $\mathfrak{F}$ auquel cette substitution est permutable et du groupe (1, A, B, C); il se confond donc avec f.

3° Il résulte de là que *le groupe dérivé de l'échelle de substitutions suivante*

$$1,\ C^{\gamma}M,\ A,\ B$$

est résoluble. D'ailleurs ce groupe est identique à celui dérivé de 1, A, B, C. En effet, d'une part la substitution $C^{\gamma}M$ dérive de la combinaison des substitutions A, B, C; d'autre part, C dérive de la combinaison de $C^{\gamma}M$, A, B. En effet, soit

$$b\gamma \equiv 1 \pmod{\mu},$$

on aura

$$(C^{\gamma}M)^b = C^{b\gamma}M = CM',$$

M' étant une substitution dérivée de 1, A, B, d'où

$$C = (C^\gamma M)^b M'^{-1}.$$

Chacun des deux groupes contient donc toutes les substitutions d'où l'autre est dérivé.

Adjoignons maintenant au groupe partiel (1, C^γM, A, B) une nouvelle substitution D. Supposons, pour fixer les idées, que cette adjonction introduise de nouvelles substitutions de la forme $\mathfrak{F}$. Soit D^δN l'une d'elles, N étant une substitution dérivée de C^γM, A, B.

On démontrera exactement comme tout à l'heure :

1° Qu'aucune des substitutions introduites avec D, à l'exception de celles qui dérivent de la combinaison de C^γM et de D^γN, ne fera partie du faisceau $\mathfrak{F}$.

2° Que toutes les substitutions (1, C^γM, A, B, C) sont permutables au faisceau dérivé de C^γM et D^δN.

3° Que les substitutions 1, C^γM, D^δN, A, B forment l'échelle d'un groupe résoluble identique au groupe (1, A, B, C, D).

Continuant ainsi, on voit qu'on pourra modifier l'échelle génératrice du groupe L de manière à faire passer en avant toutes les substitutions de $\mathfrak{F}$ à mesure qu'elles seront introduites. Le théorème est donc démontré.

4. Théorème III. — *Si* L *est un groupe résoluble*, $\mathfrak{L}$ *un groupe contenu dans* L *et permutable à toutes ses substitutions* (*ce peut être* L *lui-même*), $\mathfrak{F}$ *un faisceau contenu dans le groupe* $\mathfrak{L}$ *et ne renfermant qu'une partie de ses substitutions, et qui, de plus, soit permutable à toutes les substitutions* L, *on pourra déterminer un faisceau* $\mathfrak{G}$ *jouissant des propriétés suivantes :* 1° *il contiendra toutes les substitutions de* $\mathfrak{F}$, *jointes à d'autres substitutions;* 2° *il sera contenu dans* $\mathfrak{L}$; 3° *il sera permutable à toutes les substitutions* L; 4° *deux quelconques de ses substitutions g et g' satisfont à une relation de la forme*

$$gg' = g'gf,$$

f désignant une substitution du faisceau $\mathfrak{F}$.

Nous exprimerons d'une manière abrégée cette dernière propriété, en disant que les substitutions g et g' sont *échangeables, aux substitutions $\mathfrak{F}$ près.*

Démonstration. — D'après le théorème précédent, nous pouvons former l'échelle

$$1, A, B, C, D, E, \ldots,$$

génératrice de L, de telle sorte que les premières substitutions introduites soient celles du groupe $\mathfrak{L}$, et, parmi ces dernières, celles du faisceau $\mathfrak{F}$. Supposons donc, pour fixer les idées, que le faisceau $\mathfrak{F}$ soit dérivé des trois premières substitutions de la série $1, A, B$; le groupe $\mathfrak{L}$, contenant par hypothèse des substitutions qui ne font pas partie de $\mathfrak{F}$, la substitution suivante C fera partie de ce groupe.

Adjoignons maintenant à $1, A, B$ la suite des substitutions $C, D, E, \ldots$, et formons la série des groupes partiels successifs

$$(1, A, B, C), \quad (1, A, B, C, D), \quad (1, A, B, C, D, E), \ldots.$$

Nous établirons d'abord la proposition suivante :

I. *Si dans l'un de ces groupes partiels,* $(1, A, B, C, D)$ *par exemple, on peut déterminer un faisceau* Γ *jouissant des propriétés suivantes :* 1° *de contenir toutes les substitutions de $\mathfrak{F}$, jointes à d'autres substitutions;* 2° *d'être contenu dans $\mathfrak{L}$;* 3° *d'être permutable à toutes les substitutions du groupe partiel* $(1, A, B, C, D)$; 4° *d'avoir toutes ses substitutions échangeables entre elles aux $\mathfrak{F}$ près, on pourra déterminer, dans le groupe partiel suivant* $(1, A, B, C, D, E)$, *un faisceau* Γ_1 *jouissant, par rapport à ce nouveau groupe, des mêmes propriétés, et l'on pourra s'élever ainsi progressivement d'un groupe partiel à l'autre, jusqu'à ce qu'on ait reproduit le groupe* L *et le faisceau correspondant* $\mathcal{G}$, *dont l'existence se trouvera ainsi démontrée.*

Si le faisceau Γ correspondant au groupe partiel $(1, A, B, C, D)$ peut être choisi de diverses manières, tout en satisfaisant aux quatre conditions fondamentales, nous choisirons pour notre démonstration une des manières pour lesquelles le nombre de ses substitutions est *minimum.*

Adjoignons la substitution suivante E; supposons-la non permutable à Γ, car, si elle l'était, la proposition serait immédiatement démontrée pour le groupe (1, A, B, C, D, E). Soient $E^{-1}\Gamma E = \Gamma'$ le faisceau transformé de Γ par E; $E^{-2}\Gamma E^2 = \Gamma''$ le faisceau transformé de Γ', etc. La série de ces faisceaux sera nécessairement limitée, car si E^μ est égale à l'une des substitutions (1, A, B, C, D), elle sera, par hypothèse, permutable à Γ. Donc $\Gamma^\mu = \Gamma$.

Cela posé : 1° le faisceau dérivé de l'ensemble des substitutions $\Gamma, \Gamma' \ldots \Gamma^{\mu-1}$ contient toutes les substitutions $\mathfrak{F}$, jointes à d'autres substitutions : cela est évident, puisqu'il contient toutes les substitutions de Γ.

2° Il est contenu dans le groupe $\mathfrak{L}$, car les substitutions Γ sont comprises dans ce groupe, et leurs transformées Γ', Γ'' par les substitutions E, $E^2 \ldots$, permutables à $\mathfrak{L}$, y seront également comprises

3° Il est permutable aux substitutions (1, A, B, C, D, E). En effet, Γ est permutable aux substitutions (1, A, B, C, D); Γ', transformé de Γ par E, le sera à celles du groupe transformé de (1, A, B, C, D) par E : mais ce groupe transformé est identique au groupe (1, A, B, C, D) : donc Γ' et de même $\Gamma''\ldots$ seront permutables aux substitutions (1, A, B, C, D). D'ailleurs E transforme Γ en Γ', Γ' en Γ'', ... Le faisceau résultant $(\Gamma, \Gamma', \Gamma'')$ est donc permutable à toutes les substitutions (1, A, B, C, D, E).

4° Enfin toutes ces substitutions sont échangeables entre elles aux $\mathfrak{F}$ près.

En effet, soient, en premier lieu, deux substitutions γ', δ', appartenant à un même faisceau partiel, Γ' par exemple. Posons

$$\gamma'\delta' = \delta'\gamma'\varphi,$$

φ étant une substitution inconnue à déterminer : cette équation, transformée par $E^{\mu-1}$, donnera

$$\begin{aligned}(E^{\mu-1})^{-1}\gamma' E^{\mu-1}(E^{\mu-1})^{-1}\delta' E^{\mu-1} \\ = (E^{\mu-1})^{-1}\delta' E^{\mu-1}(E^{\mu-1})^{-1}\gamma' E^{\mu-1}(E^{\mu-1})^{-1}\varphi E^{\mu-1}.\end{aligned}$$

Les deux substitutions $(E^{\mu-1})^{-1}\gamma' E^{\mu-1}$, $(E^{\mu-1})^{-1}\delta' E^{\mu-1}$ font partie

du faisceau Γ : elles sont donc échangeables entre elles aux $\mathcal{F}$ près. $(E^{\mu-1})^{-1}\varphi E^{\mu-1}$ fera donc partie du faisceau $\mathcal{F}$. Sa transformée φ par $(E^{\mu-1})^{-1}$, qui est permutable à $\mathcal{F}$, fera également partie de ce faisceau.

Soient maintenant deux substitutions γ, γ' appartenant à des faisceaux partiels différents Γ et Γ'. La substitution γ' faisant partie du groupe $(1, A, B, C, D)$ sera permutable au faisceau Γ. On a donc

$$\gamma'^{-1}\gamma\gamma' = \delta,$$

δ étant une substitution du faisceau Γ.

On déduit de là

$$\gamma'\delta\gamma^{-1} = \gamma\gamma'\gamma^{-1} = (\gamma^{-1})^{-1}\gamma'\gamma^{-1}.$$

Or la substitution γ^{-1} fait partie du groupe $(1, A, B, C, D)$, dont les substitutions sont permutables au faisceau Γ'. La transformée de γ' par γ^{-1}, $\gamma'\delta\gamma^{-1}$ fera donc partie de ce faisceau, et, comme γ' en fait partie de son côté, $\delta\gamma^{-1}$ en fera partie également. D'ailleurs δ et γ font partie du faisceau Γ. La substitution $\delta\gamma^{-1}$ sera donc commune aux deux faisceaux Γ et Γ'.

Mais les substitutions communes à ces deux faisceaux ne sont autres que les $\mathcal{F}$. En effet, d'une part les substitutions $\mathcal{F}$ faisant partie de Γ et la substitution E les transformant les unes dans les autres, elles feront toutes partie de Γ'. D'autre part, Γ et Γ' n'ont aucune autre substitution commune; car ces substitutions communes, faisant partie de Γ, seraient évidemment échangeables entre elles aux $\mathcal{F}$ près, et seraient toutes contenues dans $\mathcal{L}$: elles formeraient un faisceau Γ_1 contenant toutes les substitutions $\mathcal{F}$, jointes à d'autres substitutions; enfin Γ_1 serait permutable à toutes les substitutions $(1, A, B, C, D)$, car chacune de ces dernières substitutions étant permutable à la fois à Γ et à Γ', transformerait les substitutions de Γ_1 communes à ces deux groupes en substitutions également communes à ces deux groupes, et qui, par suite, reproduiraient à l'ordre près celles de Γ_1. Le faisceau Γ_1, qui contient moins de substitutions que Γ, jouirait donc des mêmes propriétés fondamentales, ce qui est contraire à notre point de départ.

On aura donc

$$\delta\gamma^{-1} = f \quad \text{ou} \quad \delta = f\gamma, \quad \text{d'où} \quad \gamma\gamma' = \gamma' f \gamma = \gamma'\gamma f_1,$$

f, f_1 désignant des substitutions convenablement choisies dans le faisceau $\mathfrak{F}$.

II. Mais le premier groupe partiel (1, A, B, C) contient toutes les substitutions de $\mathfrak{F}$ jointes à C : il est contenu dans $\mathfrak{L}$; il est permutable à ses propres substitutions; enfin celles-ci sont échangeables entre elles aux $\mathfrak{F}$ près. Car ces substitutions sont toutes de la forme $C^\lambda f$, où f désigne une des substitutions de $\mathfrak{F}$, et C étant permutable aux $\mathfrak{F}$, si l'on pose en général

$$C^\lambda f . C^{\lambda'} f' = C^{\lambda'} f' . C^\lambda f . \varphi,$$

la substitution

$$\varphi = (C^{\lambda'} f' . C^\lambda f)^{-1} . C^\lambda f . C^{\lambda'} f' = C^{-\lambda-\lambda'+\lambda+\lambda'} f_1 = f_1$$

se réduit à une substitution de $\mathfrak{F}$.

Le faisceau Γ correspondant à ce groupe partiel sera donc ce groupe lui-même : en s'élevant ensuite de proche en proche par la méthode que nous venons d'exposer, on démontrera le théorème.

5. Théorème IV. — *Tout groupe résoluble* L *peut être considéré comme le dernier terme d'une série de groupes partiels* 1, F, G, H, ... *jouissant des propriétés suivantes : 1° chacun de ces groupes est contenu dans le suivant; 2° il est permutable à toutes les substitutions* L; *3° deux quelconques de ses substitutions sont échangeables entre elles, aux substitutions près du groupe précédent.*

Ce théorème capital résulte immédiatement de l'application réitérée du précédent.

Posons, en effet, dans le théorème précédent, $\mathfrak{L} = L$ et prenons, pour le faisceau $\mathfrak{F}$, la substitution unique 1. Nous en conclurons l'existence d'un faisceau plus général F, également permutable aux substitutions L.

Prenant ensuite $\mathfrak{F} = F$, nous en conclurons l'existence du faisceau G, etc.

Le nombre des substitutions des groupes partiels F, G, H,... croissant à chaque opération, on finira par arriver au groupe total L, qui clora la série.

6. Théorème V. — *Réciproquement, tout groupe jouissant de la propriété ci-dessus énoncée est résoluble.*

En effet, on pourra former une échelle de substitutions satisfaisant aux conditions exigées par le théorème de Galois en prenant d'abord les substitutions de F dans un ordre quelconque, puisqu'elles sont échangeables entre elles : en leur adjoignant ensuite les autres substitutions de G, également dans un ordre quelconque, puisqu'elles sont permutables à F et échangeables entre elles aux substitutions F près, qui ont déjà été introduites : en leur adjoignant ensuite les autres substitutions de H, etc.

7. Théorème VI. — *Si* L *est un groupe résoluble, tout groupe* A *contenu dans* L *le sera également.*

Formons en effet la série des groupes partiels 1, F, G, H,..., L, dont le dernier terme est L. Désignons le système des substitutions communes à A et à chacun de ces divers groupes pris successivement par 1, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$,..., A.

1° Chacun des groupes de cette nouvelle série, $\mathfrak{G}$ par exemple, sera permutable aux substitutions A. Car les substitutions A faisant partie du groupe des substitutions L permutables à G transformeront les $\mathfrak{G}$, qui font partie de G, en substitutions faisant également partie de G; d'autre part, ces transformées appartiennent au groupe A. Ce sont donc, à l'ordre près, les substitutions $\mathfrak{G}$ elles-mêmes.

2° Les substitutions de chacun des groupes 1, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$,..., A sont échangeables entre elles aux substitutions près du groupe précédent. Car soient g et g' deux substitutions de $\mathfrak{G}$: étant comprises dans le groupe G, elles devront satisfaire à une relation de la forme $gg' = g'g\varphi$, φ étant l'une des substitutions de F. On en déduit $\varphi = g^{-1}g'^{-1}gg'$. Les substitutions g et g' faisant partie du groupe A, φ en fera partie également. Ce sera donc une des substitutions $\mathfrak{F}$.

Le groupe A sera donc résoluble (théorème V).

8. Théorème VII. — *Toute équation irréductible a son groupe transitif et réciproquement.*

Car si le groupe G d'une équation $f(x) = 0$ n'est pas transitif, soient x_1 une des racines de l'équation, x_2, x_3,... celles des racines de $f(x) = 0$, auxquelles les substitutions G font succéder x_1 : ces substitutions permuteront exclusivement entre elles les racines x_1, x_2, x_3,...; car si l'une d'elles, A, fait succéder x_2 à une autre racine x_μ, cette substitution, combinée à la substitution B du groupe G qui fait succéder x_1 à x_2, donnera une substitution AB qui fera également partie de G et qui fera succéder x_1 à x_μ. Donc x_μ fera partie de la suite x_1, x_2, x_3,....

Cela posé, le polynôme $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots$ étant symétrique en x_1, x_2, x_3,... et ne contenant pas les autres racines, sera invariable par les substitutions G, et par suite rationnel : donc $f(x)$ aura un diviseur rationnel et $f(x) = 0$ ne sera pas irréductible.

Réciproquement, si $f(x)$ a un diviseur rationnel

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots,$$

ce facteur devra rester inaltéré par toutes les substitutions de G : donc ces substitutions permuteront exclusivement entre elles les racines x_1, x_2, x_3,...; car s'il en était autrement, elles altéreraient évidemment la valeur de l'expression $(x - x_1)$, $(x - x_2)$,..., tant que x restera indéterminé.

9. Supposons que nous ayons formé le tableau de tous les groupes résolubles et transitifs pour un degré donné; si nous effaçons tous ceux de ces groupes qui sont contenus dans quelque autre, il en restera quelques-uns, en nombre relativement restreint, auxquels nous donnerons le nom de groupes résolubles *généraux*. D'après ce qui précède, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit résoluble est qu'il soit contenu dans quelqu'un de ces groupes généraux L, L', L'',....

Ces derniers sont les seuls dont la détermination présente de l'intérêt. Chacun d'eux caractérise un type spécial d'équations irréductibles et résolubles par radicaux, et ils donnent à eux seuls les conditions nécessaires et suffisantes de résolubilité.

Considérons en effet une équation dont le groupe A soit contenu dans L. Toute fonction des racines invariable par les substitutions A

sera exprimable rationnellement. A plus forte raison une fonction des racines, invariable par toutes les substitutions L, sera exprimable rationnellement. L'équation proposée satisfera donc à toutes les conditions qui caractérisent les équations dont le groupe est L. Pour que son groupe se réduise à A, elle devra satisfaire en outre à d'autres conditions accessoires et étrangères à la question de résolubilité.

Nous bornerons donc notre recherche à celle des groupes résolubles, transitifs et généraux.

Notre méthode consistera à nous élever progressivement à la connaissance des groupes que nous cherchons, par la détermination successive des divers groupes partiels F, G, H,..., etc. Cette marche présente les avantages suivants : d'une part, les propriétés particulières à chacun de ces groupes facilitent sa construction; d'autre part, les substitutions de L étant assujetties à la condition d'être permutables à chacun de ces groupes, le champ des recherches se limitera progressivement, à mesure que l'on aura déterminé un plus grand nombre de ces groupes partiels successifs. Cette simplification n'aurait pas lieu, si l'on voulait prendre pour point de départ le théorème de Galois dans sa forme primitive, et former directement l'échelle des substitutions 1, A, B, C,..., assujetties à la seule condition que chacune d'elles soit permutable au groupe dérivé des précédentes.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DU PROBLÈME DANS LE CAS DES GROUPES PRIMITIFS.

1. Soit L un groupe résoluble et primitif. Nous avons vu qu'on peut toujours déterminer un groupe partiel F permutable aux substitutions L et tel que ses substitutions soient échangeables entre elles (chap. Ier, théorème IV). Si cette détermination peut se faire de plusieurs manières, nous serons toujours maîtres de choisir parmi ces diverses manières l'une de celles pour lesquelles le nombre des substitutions de F est *minimum*.

Soit f une substitution d'ordre premier p, choisie parmi celles du

faisceau F. Soient $f, f', f'', \ldots$ les transformées de f par les diverses substitutions du groupe L.

1° Le faisceau dérivé de $f, f', f'', \ldots$ a toutes ses substitutions échangeables entre elles, puisque toutes sont comprises dans le faisceau F : il est évidemment permutable à toutes les substitutions L. *Il contient donc toutes les substitutions de* F, puisque par hypothèse on ne peut déterminer aucun faisceau moindre que F et jouissant des deux propriétés fondamentales ci-dessus.

2° *Ce faisceau est transitif.* Supposons en effet qu'il ne le soit pas. Soient a une lettre donnée, $a, a', a'', \ldots$ les diverses lettres que les substitutions F permettent de lui faire succéder; toutes ces substitutions les permuteront exclusivement entre elles. En effet, si l'une de ces substitutions f' fait succéder à a' une lettre telle que α, on pourra faire succéder α à a en combinant cette substitution f' avec la substitution f'' qui fait succéder a' à a. La lettre α fera donc partie de la série $a, a', a'', \ldots$.

Soit b une autre lettre quelconque. Il existe dans le groupe L, supposé primitif et par suite transitif, une substitution au moins, A, qui la fera succéder à a. Soient $b', b'', \ldots$ les lettres que A fait succéder à $a', a'', \ldots$. Les lettres $b, b', b'', \ldots$ jouiront de la propriété d'être permutées exclusivement entre elles, et transitivement dans le faisceau transformé de F par A, lequel est identique à F. D'ailleurs, les deux systèmes $a, a', a'', \ldots$ et $b, b', b'', \ldots$ ne peuvent avoir aucune lettre commune : en effet, si l'on avait, par exemple $a'' = b'$, on pourrait, contre l'hypothèse, faire succéder b à a en combinant deux des substitutions F, la première remplaçant a par a'', la seconde remplaçant $a'' = b'$ par b.

Si c est une lettre qui ne fasse partie d'aucune des deux séries $a, a', a''', \ldots, b, b', b'', \ldots$, il existera dans L une substitution au moins qui la fera succéder à a ; si $c, c', c'', \ldots$ sont les lettres que cette substitution fait succéder respectivement à $a, a', a'', \ldots$, elles jouissent de la propriété d'être permutées exclusivement entre elles et transitivement dans le faisceau F. D'ailleurs, les lettres du système $c, c', c'', \ldots$ sont essentiellement distinctes de celles des deux premiers systèmes $a, a', a'', \ldots$ et $b, b', b'', \ldots$.

Continuant ainsi, on voit que les lettres se partageront en systèmes

également nombreux, $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$, les lettres de chaque système jouissant de la propriété d'être permutées exclusivement entre elles, et transitivement, dans les substitutions du faisceau F.

Considérons maintenant une substitution quelconque du groupe L. Les lettres qu'elle fait succéder à $a, a', a'', \ldots$ jouissent de la propriété d'être permutées exclusivement entre elles, et transitivement dans le faisceau transformé de F par la substitution considérée, lequel faisceau est identique à F. Si donc b', par exemple, est l'une de ces lettres, les autres sont celles que les F permutent avec b', à savoir celles du système $b, b', b'', \ldots$.

Ainsi, toutes les substitutions L feraient succéder à l'ensemble des lettres de chaque système, tel que $a, a', a'', \ldots$ l'ensemble des lettres d'un même système. Le groupe ne serait donc pas primitif, comme nous le supposons.

Il n'est donc pas permis d'admettre que le faisceau F ne soit pas transitif.

3° *Chacune des substitutions* F (*à l'exception de la substitution* 1) *déplace toutes les lettres*. Supposons en effet que l'une d'elles, A, laisse la lettre a immobile. Soit a' une autre lettre quelconque. Le faisceau F étant transitif, contiendra une substitution B qui remplace a par a'. La substitution $B^{-1}AB$ laissera a' immobile (p. 6, note). Mais A et B étant échangeables, $B^{-1}AB = A$. La substitution A ne déplacerait donc aucune lettre, et se réduirait à l'unité.

4° *Toutes les substitutions* F *sont d'ordre* p. Car elles dérivent toutes de la combinaison de $f, f', f'', \ldots$, substitutions échangeables entre elles et d'ordre p. Soit $f^{\alpha} f'^{\beta} f''^{\gamma} \ldots$ l'une d'elles : on aura

$$(f^{\alpha} f'^{\beta} f''^{\gamma})^p = f^{\alpha p} f'^{\beta p} f''^{\gamma p} = 1.$$

5° *L'ordre de* F *est une puissance exacte de* p, *telle que* p^n. En effet, la substitution f est d'ordre p. Si F renferme des substitutions différentes de f et de ses puissances, soit f_1 l'une d'elles; les substitutions f et f_1 étant échangeables entre elles et d'ordre p, celles qui dérivent de leur combinaison seront toutes de la forme $f^{\alpha} f_1^{\beta}$, α et β étant des entiers variables de 0 à $p-1$. D'ailleurs, les substitutions de cette

forme relatives aux p^2 systèmes de valeurs de α et de β sont toutes distinctes.

Supposons en effet

$$f^{\alpha} f_1^{\beta} = f^{\alpha'} f_1^{\beta'},$$

d'où

$$f_1^{\beta-\beta'} = f^{\alpha'-\alpha}.$$

Si $\beta = \beta'$, on devra avoir

$$\alpha = \alpha'.$$

Si $\beta - \beta' \gtrless 0$, en élevant l'égalité ci-dessus à la puissance x, on aura

$$f_1^{(\beta-\beta')x} = f^{(\alpha'-\alpha)x}.$$

L'entier arbitraire x peut être choisi de telle sorte que

$$(\beta - \beta')x \equiv 1 \pmod{p};$$

on aura alors

$$f_1 = f_1^{(\beta-\beta')x} = f^{(\alpha'-\alpha)x},$$

et f_1 serait, contrairement à l'hypothèse, une puissance de f.

Le nombre des substitutions distinctes dérivées de f et f_1 sera donc p^2.

Si F contient une substitution f_2 différente de celles-là, les substitutions dérivées de f, f_1, f_2 seront de la forme $f^{\alpha} f_1^{\beta} f_2^{\gamma}$, où α, β, γ sont des entiers variables de 0 à $p-1$.

Les substitutions de cette forme relatives aux p^3 systèmes de valeurs de α, β, γ sont toutes distinctes. En effet, de l'égalité

$$f^{\alpha} f_1^{\beta} f_2^{\gamma} = f^{\alpha'} f_1^{\beta'} f_2^{\gamma'},$$

on déduit, si $\gamma = \gamma'$,

$$f^{\alpha} f_1^{\beta} = f^{\alpha} f_1^{\beta'},$$

d'où

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta',$$

et si $\gamma \lessgtr \gamma'$, on en déduirait

$$f_2^{\gamma-\gamma'} = f^{\alpha'-\alpha} f_1^{\beta'-\beta},$$

ou, en posant $(\gamma - \gamma')x \equiv 1 \pmod{p}$,

$$f_2 = f_2^{(\gamma-\gamma')x} = f^{(\alpha'-\alpha)x} f_1^{(\beta'-\beta)x}.$$

La substitution f_2 serait donc dérivée des précédentes, contre l'hypothèse.

Le nombre des substitutions distinctes dérivées de f, f_1, f_2 sera donc p^3.

On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé le faisceau F.

6° *Le nombre des lettres sera p^n :* en effet, le faisceau F étant transitif contiendra au moins une substitution qui permette de remplacer une lettre a par une autre lettre quelconque a'. D'ailleurs il n'en contiendra qu'une : car s'il y en avait deux différentes f et f', la substitution $f^{-1}f'$, différente de l'unité, laisserait a immobile, ce qui ne peut être (3°). Le nombre des lettres est donc précisément égal au nombre p^n des substitutions F.

On peut donc énoncer ce premier théorème :

Théorème I. — *Dans tout groupe résoluble primitif, le nombre des lettres est une puissance, telle que p^n, d'un nombre premier p.*

2. Désignons les diverses lettres par le symbole général $a_{x,Y}$, les indices x et Y variant le premier de 0 à $p-1$, le second de 0 à $p^{n-1}-1$; on peut choisir arbitrairement parmi les systèmes de valeurs de ces deux indices, celui qu'on voudra faire correspondre à chaque lettre donnée; nous le ferons ainsi qu'il suit :

Soient $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$, n substitutions dont aucune ne soit dérivée des précédentes, et qui reproduisent par leurs combinaisons toutes les substitutions de F (page 123, 5°). Choisissons à volonté celle des lettres que nous désignerons par $a_{0,0}$; les substitutions $f, f_1, \ldots, f_{n-2}$ et leurs dérivées sont en nombre p^{n-1}, et deux d'entre elles ne peuvent remplacer $a_{0,0}$ par une même lettre : elles permuteront donc $a_{0,0}$ avec p^{n-1} autres lettres, que nous désignerons respectivement par $a_{0,0}$, $a_{0,1}, \ldots$, $a_{0,Y}, \ldots$, les diverses valeurs de l'indice Y étant assignées à ces diverses lettres d'une manière arbitraire.

La substitution f_{n-1} remplacera $a_{0,0}, \ldots, a_{0,Y}, \ldots$ par une série d'autres

lettres, que nous représenterons respectivement par $a_{1,0},\ldots, a_{1,\text{Y}},\ldots$: à celles-ci elle fera succéder d'autres lettres $a_{2,0},\ldots, a_{2,\text{Y}},\ldots$ La substitution $(f_{n-1})^\alpha$ fera ainsi succéder en général aux lettres $a_{0,0},\ldots, a_{0,\text{Y}}$ les lettres correspondantes de la série $a_{\alpha,0},\ldots, a_{\alpha,\text{Y}}$. $(f_{n-1})^p$ étant égale à l'unité, la série $a_{p,0},\ldots, a_{p,\text{Y}}$ se réduira identiquement à $a_{0,0},\ldots, a_{0,\text{Y}}$ et les séries se reproduiront périodiquement à partir de celle-là. On n'aura donc en tout que p séries distinctes

$$\begin{array}{l} a_{0,0},\ldots,\quad a_{0,\text{Y}},\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{x,0},\ldots,\quad a_{x,\text{Y}},\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{p-1,0},\ldots,\quad a_{p-1,\text{Y}}\ldots \end{array}$$

D'ailleurs, tous les termes de ces séries représenteront des lettres essentiellement différentes.

En effet, les substitutions du faisceau partiel $(1, f,\ldots, f_{n-2})$ permutent exclusivement entre elles les lettres $a_{0,0},\ldots, a_{0,\text{Y}}$. Les lettres $a_{x,0},\ldots, a_{x,\text{Y}}$ qui remplacent celles-ci par l'effet de la substitution $(f_{n-1})^x$ seront donc permutées exclusivement entre elles dans le faisceau transformé de $(1, f, f_1,\ldots, f_{n-2})$ par $(f_{n-1})^x$: mais les substitutions $1, f, f_1,\ldots, f_{n-1}$ étant toutes échangeables, ce faisceau transformé est identique à $(1, f, f_1,\ldots, f_{n-2})$.

Ainsi les substitutions $(1, f, f_1,\ldots, f_{n-2})$ permutent exclusivement entre elles les lettres de chacune des séries : f_{n-1} permute les séries entre elles; toutes les substitutions F permuteront donc exclusivement entre elles les lettres comprises dans ces séries. Mais le nombre total des termes de ces séries est égal à p^n, nombre des lettres. Si donc plusieurs de ces termes représentaient la même lettre, on aurait un système de moins de p^n lettres se permutant exclusivement entre elles par les substitutions F. Le faisceau F ne serait donc pas transitif, ce que nous avons démontré impossible.

Ainsi, toutes les lettres représentées en général par le symbole $a_{x,\text{Y}}$ seront distinctes, et la substitution f_{n-1} remplacera en général la

lettre $a_{x,\mathrm{Y}}$ par la lettre $a_{x+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\,\mathrm{Y}}$, ce que nous pourrons exprimer par la notation suivante :

$$f_{n-1} = \begin{vmatrix} x & x+1\,(\mathrm{mod.}\,p) \\ \mathrm{Y} & \mathrm{Y} \end{vmatrix}.$$

Chacune des substitutions $(1, f, \ldots, f_{n-2})$ remplace en général chaque lettre $a_{x,\mathrm{Y}}$ par une lettre $a_{x,\mathrm{Y}'}$ de la même série ; l'indice Y′ peut dépendre de x et de Y; si l'on pose $\mathrm{Y}' = \psi(x, \mathrm{Y})$, on pourra représenter la substitution considérée f' par la notation

$$f' = \begin{vmatrix} x & x \\ \mathrm{Y} & \psi(x, \mathrm{Y}) \end{vmatrix}.$$

Mais on doit avoir

$$f'f_{n-1} = f_{n-1}f'.$$

Or $f'f_{n-1}$ remplace la lettre $a_{x,\mathrm{Y}}$ par celle-ci $a_{x+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\,\psi(x,\mathrm{Y})}$; $f_{n-1}f'$ la remplace par celle-ci $a_{x+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\,\psi[x+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\,\mathrm{Y}]}$. Ces deux lettres devant être identiques, on aura

$$\psi(x, \mathrm{Y}) = \psi[x+1\,(\mathrm{mod.}\,p), \mathrm{Y}].$$

La fonction ψ est donc indépendante de x, et se réduit à $\psi(\mathrm{Y})$.

Considérons maintenant en particulier les lettres $a_{0,0}, \ldots, a_{0,\mathrm{Y}}$ de la première série. Au lieu de les distinguer les unes des autres par l'indice unique Y, on pourra le faire à l'aide de deux indices y et Z, variant l'un de 0 à $p-1$, l'autre de 0 à $p^{n-2}-1$; et l'on verra, exactement comme tout à l'heure, que les valeurs de ces indices pour chacune des lettres que l'on considère peuvent être choisies de telle sorte, 1° que la substitution f_{n-2} remplace en général la lettre $a_{0,y,\mathrm{Z}}$ par la lettre $a_{0,y+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\,\mathrm{Z}}$; 2° que toute substitution f' du faisceau partiel $(1, f, \ldots, f_{n-3})$ la remplace par une lettre $a_{0,y,\mathrm{Z}'}$, l'indice Z′ étant indépendant de y. Désignons en général par $a_{x,y,\mathrm{Z}}$ la lettre que la substitution $(f_{n-1})^x$ fait succéder à $a_{0,y,\mathrm{Z}}$. La substitution f_{n-2} remplacera

la lettre générale $a_{x,y,\mathrm{Z}}$ par $a_{x,y+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\mathrm{Z}}$, et la substitution f' la remplacera par $a_{x,y,\mathrm{Z}'}$. En effet, toutes ces substitutions étant échangeables entre elles, on aura

$$(f_{n-1})^{-x} f_{n-2} (f_{n-1})^{x} = f_{n-2},$$

et comme $(f_{n-1})^{-x}$ remplace $a_{x,y,\mathrm{Z}}$ par $a_{0,y,\mathrm{Z}}$, que f_{n-2} remplace par $a_{0,y+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\mathrm{Z}}$, que $(f_{n-1})^{x}$ remplace enfin par $a_{x,y+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\mathrm{Z}}$, on voit que f_{n-2} remplacera $a_{x,y,\mathrm{Z}}$ par $a_{x,y+1\,(\mathrm{mod.}\,p),\mathrm{Z}}$. On aura de même

$$(f_{n-1})^{-x} f' (f_{n-1})^{x} = f';$$

et f' remplaçant $a_{o,y,\mathrm{Z}}$ par $a_{o,y,\mathrm{Z}'}$, $(f_{n-1})^{-x} f' (f_{n-1})^{x} = f'$ remplacera $a_{x,y,\mathrm{Z}}$ par $a_{x,y,\mathrm{Z}'}$.

On aura ainsi

$$f_{n-1} = \begin{vmatrix} x & x+1\ (\mathrm{mod.}\ p) \\ y & y \\ \mathrm{Z} & \mathrm{Z} \end{vmatrix}, \quad f_{n-2} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y+1\ (\mathrm{mod.}\ p) \\ \mathrm{Z} & \mathrm{Z} \end{vmatrix}.$$

les substitutions $(1, f, \ldots, f_{n-3})$ étant toutes de la forme

$$\begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ \mathrm{Z} & \psi_1(\mathrm{Z}) \end{vmatrix}.$$

On pourra de même remplacer l'indice Z par deux autres, z et U,...; en continuant ces opérations on arrivera en dernière analyse au théorème suivant.

Théorème II. — *Soit* L *un groupe résoluble primitif entre p^n lettres, p étant premier. Si l'on désigne les lettres par le symbole général $a_{x,y,z,\ldots}$, où x, y, z sont des indices en nombre n, variables chacun de 0 à $p-1$, on pourra choisir les valeurs de $x, y, z,\ldots$ qui correspondent à chaque lettre, de telle sorte que les substitutions du premier groupe partiel* F *dérivent des suivantes :*

$$f_{n-1} = \begin{vmatrix} x & x+1\ (\mathrm{mod.}\ p) \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \quad f_{n-2} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y+1\ (\mathrm{mod.}\ p) \\ z & z \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \ldots.$$

Les substitutions de F *seront donc toutes de la forme*

$$f_{n-1}^{\alpha} f_{n-2}^{\alpha'} f_{n-3}^{\alpha''} \cdots = \left| \begin{array}{ll} x & x+\alpha \ (\text{mod.}\ p) \\ y & y+\alpha' \ (\text{mod.}\ p) \\ z & z+\alpha'' (\text{mod.}\ p) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \right|,$$

ou plus simplement

$$f_{n-1}^{\alpha} f_{n-2}^{\alpha'} f_{n-3}^{\alpha''} \cdots = \left| \begin{array}{ll} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \\ z & z+\alpha'' \\ \ldots & \ldots \end{array} \right|,$$

en sous-entendant la condition de prendre à la place des indices $x+\alpha$, $y+\alpha'$, $z+\alpha''$,..., lorsqu'ils dépassent p, le reste qu'ils donnent étant divisés par ce nombre.

3. Le groupe partiel F est ainsi déterminé : les substitutions L lui sont toutes permutables, ce qui jette déjà un grand jour sur la nature de ces substitutions.

Soit en effet

$$A = \left| \begin{array}{ll} x & \varphi\ (x, y, z\ldots) \\ y & \varphi'\ (x, y, z\ldots) \\ z & \varphi''(x, y, z\ldots) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$

l'une d'elles ; la transformée de $\left| \begin{array}{ll} x & x+1 \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \end{array} \right|$ par A sera

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi\ (x, y, z\ldots) & \varphi\ (x+1, y, z\ldots) \\ \varphi'(x, y, z\ldots) & \varphi'(x+1, y, z\ldots) \\ \varphi''(x, y, z\ldots) & \varphi''(x+1, y, z\ldots) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array} \right|.$$

Pour que cette substitution se réduise à l'une de celles de F,

telle que

$$\left|\begin{matrix} x & x+a \\ y & y+a' \\ z & z+a'' \\ \dots & \dots \end{matrix}\right|,$$

il faudra que l'on ait les relations

$$\begin{aligned} \varphi\,(x+1, y, z\ldots) &= \varphi\,(x, y, z\ldots) + a, \\ \varphi'(x+1, y, z\ldots) &= \varphi'(x, y, z\ldots) + a', \\ \varphi''(x+1, y, z\ldots) &= \varphi''(x, y, z\ldots) + a''. \\ \dots\dots & \dots\dots \end{aligned}$$

On aura de même, si

$$\left|\begin{matrix} x & x+b \\ y & y+b' \\ z & z+b'' \\ \dots & \dots \end{matrix}\right|$$

est la transformée de $\left|\begin{matrix} x & x \\ y & y+1 \\ z & z \\ \dots & \dots \end{matrix}\right|$ par Λ,

$$\begin{aligned} \varphi\,(x, y+1\ldots) &= \varphi\,(x, y, z\ldots) + b, \\ \varphi'(x, y+1\ldots) &= \varphi'(x, y, z\ldots) + b', \\ \varphi''(x, y+1\ldots) &= \varphi''(x, y, z\ldots) + b''. \\ \dots\dots & \dots\dots \end{aligned}$$

On aura de même

$$\varphi(x, y, z+1\ldots) = \varphi(x, y, z\ldots) + c\ldots.$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

On déduit de là, en posant $\varphi(0, 0, 0,\ldots) = \alpha$, $\varphi'(0, 0, 0, \ldots) = \alpha'$,

$\varphi''(0, 0, 0, ..) = \alpha''...,$

$$\begin{aligned}
\varphi\,(x, y, z, \ldots) &= a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \alpha,\\
\varphi'(x, y, z, \ldots) &= a'x + b'y + c'z + \ldots + \alpha',\\
\varphi''(x, y, z, \ldots) &= a''x + b''y + c''z + \ldots + \alpha'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

d'où le théorème suivant :

Théorème III. — *Les substitutions du groupe primitif* L *sont toutes de la forme linéaire.*

$$\left|\begin{array}{ll}
x & a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \alpha,\\
y & a'x + b'y + c'z + .. + \alpha',\\
z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \alpha'',\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|$$

$a, b, c, .., \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ étant des entiers constants.

4. Tous les systèmes de valeurs entières de ces coefficients ne sont pas admissibles. En effet, dans toute substitution, une lettre quelconque, dont les indices sont respectivement $x_1, y_1, z_1, \ldots$, doit remplacer une lettre unique et bien déterminée. Soient $x, y, z, \ldots$ les indices de cette lettre, ils sont liés à $x_1, y_1, z_1, \ldots$ par les relations

$$\begin{aligned}
a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \alpha &\equiv x_1 \pmod{p},\\
a'x + b'y + c'z + \ldots + \alpha' &\equiv y_1 \pmod{p},\\
a''x + b''y + c''z + \ldots + \alpha'' &\equiv z_1 \pmod{p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour que ces relations déterminent x, y, z sans ambiguïté ni impossibilité, il sera nécessaire et suffisant que le déterminant

$$\left|\begin{array}{lll}
a & b & c\ldots\\
a' & b' & c'\ldots\\
a'' & b'' & c''\ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right| \quad \text{soit} \gtrless 0 \pmod{p}$$

5. Soit

$$\begin{vmatrix} x & a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \alpha \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \alpha' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \alpha'' \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}$$

une des substitutions du groupe : en la combinant avec la substitution

$$\begin{vmatrix} x & x - \alpha \\ y & y - \alpha' \\ z & z - \alpha'' \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix},$$

qui est de la forme des F et fait, à ce titre, partie du groupe L, on obtiendra la substitution linéaire sans termes constants

$$\begin{vmatrix} x & a\,x + b\,y + c\,z + \ldots \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}.$$

Les substitutions de cette espèce contenues dans L forment évidemment un groupe $\mathfrak{L}$; car la combinaison de deux substitutions linéaires sans termes constants donne une substitution linéaire également sans termes constants. Ce groupe étant contenu dans L, sera résoluble. D'autre part, il suffit que $\mathfrak{L}$ soit résoluble pour que L le soit; car toutes les substitutions de L s'obtiennent en combinant les substitutions $\mathfrak{L}$ avec celles du faisceau F, qui leur est permutable.

Le groupe $\mathfrak{L}$ est l'un des groupes résolubles les plus généraux parmi ceux dont les substitutions sont linéaires; car si Λ était un groupe résoluble de cette espèce, plus général que $\mathfrak{L}$, le groupe dérivé de Λ et de F serait plus général que L, dérivé de $\mathfrak{L}$ et de F, ce qui ne peut être par hypothèse.

Théorème IV. — *Le problème se réduit donc à déterminer les groupes résolubles $\mathfrak{L}$ les plus généraux que possible parmi ceux dont les substi-*

tutions ont la forme linéaire sans termes constants

$$\begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

avec la condition

$$\begin{vmatrix} a & b & c \ldots \\ a' & b' & c' \ldots \\ a'' & b'' & c'' \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \gtrless 0 \pmod{p},$$

et qui, combinés avec les substitutions

$$F = \begin{vmatrix} x & x + \alpha \\ y & y + \alpha' \\ z & z + \alpha'' \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

reproduisent un groupe primitif.

CHAPITRE III.

RÉDUCTION DU PROBLÈME AU CAS PRÉCÉDENT.

1. La détermination des groupes résolubles transitifs, mais non primitifs les plus généraux, se ramène au cas des groupes primitifs. Cette réduction fait l'objet des pages suivantes :

2. Soit L un groupe transitif et général, mais non primitif. S'il existe plusieurs manières de répartir les lettres en systèmes tels, que dans toutes les substitutions L les lettres de chaque système soient remplacées par les lettres d'un même système, nous choisirons parmi ces modes de répartition un de ceux où le nombre q des systèmes est *minimum* : soit r le nombre de lettres de chacun d'eux

Les lettres pourront être distinguées les unes des autres par deux indices u et v, l'indice u, variable de o à $q-1$, caractérisant les divers systèmes; tandis que l'indice v, variable de o à $r-1$, servira à distinguer entre elles les lettres d'un même système.

Chacune des substitutions L sera de la forme

$$l = \begin{vmatrix} u & \varphi(u) \\ v & \psi(u, v) \end{vmatrix}.$$

1° Écrivons en regard de chacune de ces substitutions la substitution suivante

$$\lambda = |u, \varphi(u)|$$

entre q lettres auxiliaires caractérisées par un seul indice u variable de o à $q-1$, de telle sorte que chaque lettre auxiliaire corresponde à l'un des systèmes de lettres du groupe L. Le produit ll' de deux substitutions l, l' aura évidemment pour corrélative le produit $\lambda\lambda'$ de λ et λ', corrélatives de l et l'. Les substitutions λ forment donc un groupe résoluble Λ (chap. Ier, théor. Ier).

Ce groupe devra être transitif; car le groupe L, permutant transitivement toutes les lettres, devra *à fortiori* permuter transitivement les systèmes. De plus, il sera primitif; en effet, s'il ne l'était pas, on pourrait, en remplaçant l'indice unique u par deux indices u_1 et u_2 convenablement choisis, mettre toutes les substitutions Λ sous la forme

$$\begin{vmatrix} u_1 & \varphi_1(u_1) \\ u_2 & \varphi_2(u_1, u_2) \end{vmatrix},$$

et par suite les substitutions L sous la forme

$$\begin{vmatrix} u_1 & \varphi_1(u_1) \\ u_2 & \varphi_2(u_1, u_2) \\ v & \psi_1(u_1, u_2, v) \end{vmatrix};$$

d'où l'on voit qu'en réunissant ensemble toutes les lettres pour lesquelles l'indice u_1 est le même, on aurait, contrairement à notre

supposition, une répartition en systèmes dont le nombre serait inférieur à q.

2° Le groupe Λ étant primitif, il résulte du chapitre II : 1° que q égale une puissance p^n d'un nombre premier p ; 2° qu'on peut remplacer l'indice unique u par n indices $x, y, z, \ldots$, variant chacun de 0 à $p-1$, et choisis de telle sorte que les substitutions de Λ soient toutes de la forme linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} x & a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \alpha \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \alpha' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \alpha'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|;$$

en outre, ce groupe Λ contiendra toutes les substitutions du faisceau

$$\left|\begin{array}{ll} x & x + \alpha \\ y & y + \alpha' \\ z & z + \alpha'' \\ \ldots & \ldots \end{array}\right|.$$

Les substitutions L prendront la forme :

$$\left|\begin{array}{ll} x & ax + by + cz + \ldots + \alpha \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \alpha' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \alpha'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu & \text{fonct. de } (x, y, z, \ldots, \nu) \end{array}\right|.$$

3° Considérons en particulier parmi ces substitutions celles de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x & x + \alpha \\ y & y + \alpha' \\ z & z + \alpha'' \\ \ldots & \ldots \\ \nu & \text{fonct. de } (x, y, z, \ldots, \nu) \end{array}\right|.$$

Elles forment évidemment un groupe E auxquelles toutes les autres

sont permutables. On pourra donc les faire passer en avant lorsque l'on construira l'échelle génératrice de L.

4° Considérons plus spécialement encore les substitutions, s'il en existe, qui ne déplacent pas les systèmes : elles sont de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \\ v & \text{fonct. de } (x, y, z, \ldots, v) \end{array}\right|,$$

et sont comprises parmi les E. Elles forment évidemment un groupe F auquel toutes les autres sont permutables. On pourra donc les faire passer en avant de toutes les autres.

5. Lemme I. — *S'il existe des substitutions* F *qui ne déplacent pas les systèmes, soit* F_1 *l'une d'elles, qui s'obtienne en exécutant simultanément certains déplacements* $f_1, f'_1, f''_1, \ldots$ *dans l'intérieur des divers systèmes* S, S', S'',... *entre les lettres qui les composent.*

Chacune des substitutions partielles $f_1, f'_1, f''_1, \ldots$ *considérée isolément, devra faire partie de* F.

En effet, soit $F_2 = f_2 f'_2 f''_2 \ldots$ une autre substitution de F; les déplacements que la substitution $F_1 F_2$ fait éprouver aux lettres des systèmes S, S', S'' seront respectivement $f_1 f_2$, $f'_1 f'_2$, $f''_1 f''_2$, ... Le groupe F, contenu dans L, étant résoluble, chacun des groupes partiels $(f_1, f_2, \ldots)$, $(f'_1, f'_2, \ldots)$, $(f''_1, f''_2, \ldots)$ sera donc résoluble (chap. Ier, théor. Ier); d'ailleurs ces groupes déplaçant chacun de son côté des lettres différentes sont échangeables entre eux : le groupe $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, \ldots, f'_1, f'_2, \ldots, f''_1, f''_2 \ldots)$, dérivé de leur combinaison, est donc résoluble.

Toutes les substitutions L sont permutables à $\mathfrak{F}$ comme elles le sont à F. Soit en effet l une de ces substitutions : la transformée de F_1 par l, $l^{-1} F_1 l = l^{-1} f_1 l . l^{-1} f'_1 l . l^{-1} f''_1 l, \ldots$, doit faire partie du groupe F. Donc les déplacements qu'elle fait subir aux lettres dans chacun des divers systèmes font partie du groupe $\mathfrak{F}$. Or les déplacements relatifs

aux systèmes auquels l fait succéder S, S', S'',... sont respectivement $l^{-1}f_1 l$, $l^{-1}f_1' l$, $l^{-1}f_1'' l$,.... Chacune de ces substitutions fait donc partie du groupe $\mathfrak{F}$.

Le groupe dérivé de la combinaison de $\mathfrak{F}$ avec les substitutions de L sera donc résoluble. Il serait d'ailleurs, contre l'hypothèse, plus général que L, si toutes les substitutions $\mathfrak{F}$ n'étaient pas comprises dans L, et par suite dans F.

Le lemme est donc démontré.

4. Adjoignons maintenant successivement aux substitutions F les autres substitutions du groupe, en commençant par les E. La première sera de la forme

$$A = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \varphi(x, y, z, \ldots, v) \end{vmatrix}.$$

On peut simplifier cette forme. En effet, les diverses valeurs de l'indice v peuvent être réparties d'une manière entièrement arbitraire entre les lettres de chaque système. On peut donc admettre : 1° qu'on laisse cette répartition arbitraire dans tous ceux des systèmes pour lesquels le premier indice x est égal à zéro; 2° qu'on donne à chaque lettre du système caractérisé par les indices $1, y, z, ..$ le même indice v qu'à celle des lettres du système caractérisé par les indices $0, y, z, \ldots$, à laquelle A la fait succéder; 3° qu'on donne de même à chaque lettre du système $2, y, z, \ldots$ le même indice qu'à celle du système $1, y, z, \ldots$, à laquelle A la fait succéder, etc., jusqu'au système $p-1, y, z$. La fonction

$$\varphi(x, y, z, \ldots, v)$$

se réduira donc à v, quels que soient $y, z, \ldots$ pour toutes les valeurs de x à l'exception de $p-1$, auquel cas elle sera égale à une fonction

$$\psi(y, z, \ldots, v)$$

de $y, z, \ldots$ et v.

Cela posé, la substitution A est le produit de deux autres substi-

tutions

$$A_1 = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \\ v & \varphi(x, y, z, \ldots, v) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ y & y \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \\ v & v \end{vmatrix},$$

A_1 fait partie du groupe F. En effet, on voit aisément que la substitution A^p est égale à

$$\begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \\ v & \psi(y, z, \ldots, v) \end{vmatrix},$$

elle fait partie de F : les déplacements qu'elle fait subir aux lettres des systèmes dont le premier indice x est $p-1$, considérées isolément, feront partie de F (lemme I) ; or A_1 représente précisément l'ensemble de ces déplacements.

Les substitutions du groupe à cette période de l'opération s'obtiendront donc en combinant les F avec

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ y & y \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \\ v & v \end{vmatrix}.$$

5. Introduisons la substitution suivante :

$$B = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y+1 \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ v & \varphi_1(x, y, z, \ldots, v) \end{vmatrix}.$$

Nous avons laissé arbitraire la valeur à assigner à l'indice v pour chacune des lettres des systèmes pour lesquels le premier indice x est nul : laissons encore ce choix arbitraire dans les systèmes pour lesquels $x=0$, $y=0$; mais donnons à chaque lettre du système caractérisé par les indices $0, 1, z, \ldots$ le même indice v qu'à celle du système $0, 0, z$ à laquelle B la fait succéder : donnons de même à chaque lettre du système caractérisé par les indices $0, 2, z$ le même indice v qu'à celle du système $0, 1, z, \ldots$ à laquelle B la fait succéder, etc. La fonction $\varphi_1(x, y, z, \ldots, v)$ se trouvera réduite à v lorsque $x=0$ pour toutes les valeurs de y, excepté pour $y=p-1$, auquel cas elle se réduira à une fonction de z et de v, $\psi_1(z, \ldots, v)$.

Cela posé, B sera le produit : 1° d'une substitution B_1 qui laisse toutes les lettres immobiles, à l'exception de celles $a_{0, p-1, z, \ldots, v}$, dont les deux premiers indices sont 0 et $p-1$, qu'elle remplacera respectivement par $a_{0, p-1, z, \ldots, \psi_1(z, \ldots, v)}$; 2° d'une substitution

$$B' = \left| \begin{array}{ll} x & x \\ y & y+1 \\ z & z \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ v & \varphi'_1(x, y, z, \ldots, v) \end{array} \right|,$$

la fonction φ'_1 se réduisant à v pour $x=0$, quels que soient $y, z, \ldots, v$.

On voit aisément que B_1 n'est autre chose que l'ensemble des déplacements que la substitution B^p, qui fait partie du groupe F, fait éprouver aux lettres dont les deux premiers indices sont 0 et $p-1$; donc B_1 fait partie de F (lemme Ier). On obtiendra donc le même résultat en adjoignant au groupe $(F, \mathcal{A})$ la substitution B, ou la substitution simplifiée $B' = B_1^{-1} B$. Cette dernière substitution devra, de même que B, être permutable au groupe $(F, \mathcal{A})$, ce qui permettra de déterminer la fonction $\varphi'_1(x, y, z, \ldots, v)$ pour les valeurs de x autres que zéro.

Soit, en effet, donnée la condition

$$B'^{-1} \mathcal{A} B' = \mathcal{A}^\alpha F_1 \ (*) \quad \text{ou} \quad \mathcal{A} B' F_1^{-1} = B' \mathcal{A}^\alpha,$$

(*) $\mathcal{A}$ étant permutable à F, toutes les substitutions du groupe $(F, \mathcal{A})$ sont de la forme $\mathcal{A}^\alpha F_1$.

en désignant par F_1 l'une des substitutions F. Soit

$$F_1^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \\ v & \chi(x, y, z, \ldots, v) \end{array} \right| :$$

on aura d'une part

$$\mathcal{A} B' F_1^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x & x+1 \\ y & y+1 \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ v & \chi[x+1, y+1, z, \ldots, \varphi'_1(x+1, y, z, \ldots, v)] \end{array} \right| ,$$

et d'autre part

$$B' \mathcal{A}^{\alpha} = \left| \begin{array}{ll} x & x+\alpha \\ y & y+1 \\ z & z \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ v & \varphi'_1(x, y, z, \ldots, v) \end{array} \right| .$$

Pour que ces deux substitutions soient identiques, on devra avoir d'un côté $\alpha = 1$, et de l'autre

$$\varphi'_1(x, y, z, \ldots, v) = \chi[x+1, y+1, z, \ldots, \varphi'_1(x+1, y, z, \ldots, v)].$$

Cette équation peut servir à déterminer de proche en proche la valeur de la fonction φ'_1 pour $x = p-1$, $p-2$, etc., en partant de sa valeur initiale pour $x = 0$.

Pour $x = p-1$, on aura

$$\begin{aligned} \varphi'_1(p-1, y, z, \ldots, v) &= \chi[0, y+1, z, \ldots, \varphi'_1(0, y, z, \ldots, v)] \\ &= \chi(0, y+1, z, \ldots, v). \end{aligned}$$

B' remplacera ainsi en général la lettre $a_{p-1, y, z, \ldots, v}$ par la lettre

$a_{p-1,y+1,z,\ldots,\chi(0,y+1,z,\ldots,v)}$. Soit B'_1 une substitution qui laisse toutes les lettres immobiles, sauf celles $a_{p-1,y+1,z,\ldots,v}$, dont le premier indice est $p-1$, et qui remplace celles-ci respectivement par $a_{p-1,y+1,z,\ldots,\chi(0,y+1,z,\ldots,v)}$. Posons $B' = B''B'_1$, B'' étant une nouvelle substitution : la substitution $B'' = B'B_1'^{-1}$ sera de la forme

$$B'' = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y+1 \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \varphi''_1(x,y,z,\ldots,v) \end{vmatrix},$$

la fonction φ''_1 se réduisant à v pour $x=0$ et $x=p-1$, quels que soient $y, z, \ldots, v$.

Cela posé, la substitution B'_1 fait partie du groupe F. En effet, $\mathcal{A}$ étant permutable à F, la transformée

$$\mathcal{A}^{-1}F_1^{-1}\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \chi(x,y,z,\ldots,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \chi(x+1,y,z,\ldots,v) \end{vmatrix}$$

de F_1^{-1} par $\mathcal{A}$ fera elle-même partie du groupe F. Les déplacements qu'elle fait subir aux lettres des systèmes dont le premier indice est $p-1$, considérées isolément, font partie de F (lemme Ier). Mais l'ensemble de ces déplacements est précisément B'_1.

On obtiendra donc le même résultat en adjoignant au groupe $(F, \mathcal{A})$ la substitution B', ou la substitution simplifiée B''.

On voit exactement de même que l'on peut poser $B'' = B'''B''_1$, B''' étant une substitution de la forme

$$\begin{vmatrix} x & x \\ y & y+1 \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \varphi'''_1(x,y,z,\ldots,v) \end{vmatrix},$$

dans laquelle la fonction φ''' se réduit à v toutes les fois que $x = 0$ ou $= p - 1$ ou $= p - 2$; et B''_1 étant une substitution de F.

On obtiendra encore le même résultat en adjoignant au groupe $(F, \mathcal{A})$ la substitution B'' ou la substitution simplifiée B'''.

En poursuivant ainsi, on arrivera à une dernière substitution, où la fonction φ se réduit à v pour toutes les valeurs de x.

Soit

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y+1 \\ z & z \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v & v \end{vmatrix}$$

cette dernière substitution. Le groupe dérivé de la combinaison de F, $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ sera le même que celui dérivé de la combinaison de F, $\mathcal{A}$, B.

6. On opérera de même sur la substitution suivante C, qu'on décomposera en une série de substitutions successives faisant toutes partie de F, à l'exception de la dernière,

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z+1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v & v \end{vmatrix}.$$

Poursuivant ainsi, on obtient en dernière analyse la proposition suivante :

Lemme II. — *Les substitutions* E *résultent toutes de la combinaison des substitutions* F *avec les suivantes :*

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ y & y \\ z & z \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v & v \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y+1 \\ z & z \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v & v \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z+1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v & v \end{vmatrix}, \ldots$$

7. Soit maintenant

$$H = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots \\ v & \psi(x, y, z, \ldots, v) \end{vmatrix}$$

l'une quelconque des substitutions du groupe L; elle doit être permutable à E. On aura donc, entre autres relations, la suivante :

$$H^{-1}\mathcal{A}H = \text{une substitution de E, telle que } F_1\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{B}^{\beta}\mathcal{C}^{\gamma}\ldots,$$

ou, en remarquant que H est permutable au groupe partiel F,

$$\mathcal{A}H = HF_1\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{B}^{\beta}\mathcal{C}^{\gamma}\ldots = F_2 H\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{B}^{\beta}\mathcal{C}^{\gamma},$$

$$F_2 = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \chi(x, y, z, \ldots, v) \end{vmatrix}$$ étant une substitution de F.

Or on a, d'une part,

$$\mathcal{A}H = \begin{vmatrix} x & a(x+1) + by + cz + \ldots + \delta \\ y & a'(x+1) + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''(x+1) + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots \\ v & \psi(x+1, y, z, \ldots, v) \end{vmatrix},$$

et, d'autre part,

$$F_2 H\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{B}^{\beta}\mathcal{C}^{\gamma} = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots + \delta + \alpha \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' + \alpha' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' + \alpha'' \\ \ldots & \ldots \\ v & \psi[x, y, z, \ldots; \chi(x, y, z, \ldots, v)] \end{vmatrix}.$$

Pour que ces deux substitutions soient identiques, on aura, entre autres équations de condition, celle-ci :

$$\psi(x+1, y, z, \ldots, \nu) = \psi[x, y, z, \ldots, \chi(x, y, z, \ldots, \nu)].$$

On trouverait de même

$$\psi(x, y+1, z, \ldots, \nu) = \psi[x, y, z, \ldots, \chi'(x, y, z, \ldots, \nu)],$$
$$\psi(x, y, z+1, \ldots, \nu) = \psi[x, y, z, \ldots, \chi''(x, y, z, \ldots, \nu)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F'_2 = \left|\begin{array}{ll} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \nu & \chi'(x, y, z, \ldots, \nu) \end{array}\right|, \quad F''_2 = \left|\begin{array}{ll} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \nu & \chi''(x, y, z, \ldots, \nu) \end{array}\right|, \ldots,$$

étant des substitutions du groupe F.

Ces équations de condition permettent de déterminer de proche en proche les valeurs de la fonction $\psi(x, y, z, \ldots, \nu)$, lorsqu'on connaît sa valeur initiale pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0, \ldots$.

On aura ainsi, en posant $x = 0$, $y = 0$, $z = 0, \ldots$,

$$\psi(1, 0, 0, \ldots, \nu) = \psi[0, 0, 0, \ldots, \chi(0, 0, 0, \ldots, \nu)].$$

D'où l'on voit que la substitution H est le produit de deux autres :

1° La première, G, laissant toutes les lettres immobiles, à l'exception des suivantes : $a_{1, 0, 0, \ldots, \nu}$, qu'elle remplace respectivement par $a_{1, 0, 0, \ldots, \chi(0, 0, 0, \ldots, \nu)}$;

2° La seconde,

$$H' = \left|\begin{array}{ll} x & a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu & \psi'(x, y, z, \ldots, \nu) \end{array}\right|,$$

où la fonction $\psi'(x, y, z, \ldots, \nu)$ est égale à $\psi(x, y, z, \ldots, \nu)$ pour toutes

les valeurs de $x, y, z,\ldots, v$, excepté pour $x=1$, $y=0$, $z=0,\ldots$ auquel cas on a

$$\psi'(1, 0, 0,\ldots, v) = \psi(0, 0, 0,\ldots, v);$$

ψ' satisfait ainsi à la condition

$$\psi'(1, 0, 0,\ldots, v) = \psi'(0, 0, 0,\ldots, v).$$

D'ailleurs G fait partie du groupe F. En effet, la transformée de F_2 par $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}^{-1} F_2 \mathcal{A} = \begin{vmatrix} x+1 & x+1 \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \chi(x, y, z,\ldots, v) \end{vmatrix},$$

en fait partie; les déplacements qu'elle fait subir aux lettres du système $1, 0, 0,\ldots$, considérées isolément, en feront partie (lemme I) : or ce système de déplacements est précisément G.

On démontrera de même que la substitution H' est le produit de deux autres, dont l'une, G', fait partie de F, tandis que l'autre, H'', est égale à

$$\begin{vmatrix} x & a x + b y + c z + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots \\ v & \psi''(x, y, z,\ldots, v) \end{vmatrix},$$

la fonction ψ'' satisfaisant à la condition

$$\psi''(2, 0, 0,\ldots, v) = \psi''(1, 0, 0,\ldots, v) = \psi''(0, 0, 0,\ldots, v);$$

et, continuant ainsi, on arrivera enfin à décomposer H en une série de substitutions G, G',..., H_1, faisant toutes partie de F, à l'exception

de la dernière,

$$H_1 = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v & \psi_1(y, z, \ldots, v) \end{vmatrix},$$

la fonction ψ_1 restant la même pour toutes les valeurs de x.

On décomposera de même H_1 en substitutions G_1, $G'_1, \ldots$, H_2, faisant toutes partie de F, excepté la dernière,

$$H_2 = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v & \psi_2(z, \ldots, v) \end{vmatrix}.$$

Continuaut ainsi, on arrivera, en dernière analyse, à ramener H à des substitutions du groupe F combinées avec une substitution

$$\mathcal{S} = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v & \psi_n(v) \end{vmatrix},$$

la fonction ψ_n étant entièrement indépendante des valeurs de $x, y, z, \ldots$.

Cette dernière substitution se décompose elle-même en deux autres, échangeables entre elles :

$$I = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z \\ \ldots & \ldots \\ v & \psi_n(v) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v & v \end{vmatrix}.$$

Nous obtenons donc comme résultat le lemme suivant :

Lemme III. — *Les substitutions du groupe* L *s'obtiennent toutes par la combinaison des substitutions* F, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,..., *avec certaines substitutions de la forme*

$$IJ, \quad I'J',\ldots,$$

J, J',... *étant, ainsi que* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,..., *des substitutions qui permutent les systèmes entre eux, en remplaçant les unes par les autres les lettres affectées du même indice* ν : I, I',... *étant au contraire des substitutions qui laissent les systèmes immobiles, en permutant entre elles, simultanément et de la même manière, les lettres correspondantes de chacun d'eux.*

8. Soient IJ et I'J' deux substitutions de la forme ci-dessus contenues dans le groupe L; IJ.I'J' leur produit. Les déplacements d'ensemble que cette dernière substitution fait subir aux systèmes seront évidemment représentés par JJ', et les déplacements des lettres dans l'intérieur des systèmes le seront par II'; d'ailleurs le groupe dérivé de IJ, I'J',..., étant contenu dans L, est résoluble : chacun des deux groupes (I, I',...), (J, J',...), corrélatifs à celui-là, le sera donc également (chap. Ier, théor. Ier).

2° Les deux groupes (I, I',...), (J, J',...) ont leurs substitutions respectivement échangeables entre elles : le groupe (I, I',..., J, J',...), résultant de leur combinaison, sera donc résoluble.

3° Les substitutions J, J',... ayant la forme linéaire, sont permutables au groupe dérivé de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,...; les I, I',... sont échangeables à chacune de ces substitutions.

4° Enfin toutes les substitutions I, I',..., J, J',... sont permutables à F. Les substitutions IJ, I'J' l'étant, il suffira, pour établir cette proposition, de montrer que J, J',... le sont.

Or chacune des substitutions F résulte de la combinaison de substitutions partielles f, f', f'',... déplaçant chacune les lettres d'un seul système. Ces substitutions partielles, considérées isolément, font ellesmêmes partie du groupe F (lemme Ier). Si nous prouvons que la transformée de chacune d'elles par J en fait également partie, J sera évidemment permutable à ce groupe.

Soit donc f une substitution qui laisse toutes les lettres immobiles, excepté les lettres $a_{x_0, y_0, z_0, \ldots, \nu}$ du système caractérisé par les indices $x_0, y_0, z_0, \ldots$, lettres qu'elle remplace respectivement par $a_{x_0, y_0, z_0, \ldots, \varphi(\nu)}$; soit

$$\mathrm{J}^{-1} = \begin{vmatrix} x & ax + by + cz + \ldots + \delta \\ y & a'x + b'y + c'z + \ldots + \delta' \\ z & a''x + b''y + c''z + \ldots + \delta'' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \nu & \nu \end{vmatrix};$$

la transformée $\mathrm{J}^{-1} f \mathrm{J}$ laisse toutes les lettres immobiles, à l'exception des suivantes :

$$a_{ax_0 + by_0 + cz_0 + \ldots + \delta,\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + \ldots + \delta',\ a''x_0 + b''y_0 + c''z_0 + \ldots + \delta'', \ldots, \nu}$$

qu'elle remplace respectivement par les suivantes :

$$a_{ax_0 + by_0 + cz_0 + \ldots + \delta,\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + \ldots + \delta',\ a''x_0 + b''y_0 + c''z_0 + \ldots + \delta'', \ldots, \varphi(\nu)},$$

et l'on voit aisément que cette substitution est identique à la transformée de f par

$$\mathcal{A}^{-(ax_0 + by_0 + cz_0 + \ldots + \delta)} \mathcal{B}^{-(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + \ldots + \delta')} \mathcal{C}^{-(a''x_0 + b''y_0 + c''z_0 + \ldots + \delta'')},$$

laquelle fait partie de F.

5° Les observations précédentes montrent que le groupe dérivé des substitutions $(\mathrm{F}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \mathrm{I}, \mathrm{I}', \ldots, \mathrm{J}, \mathrm{J}', \ldots)$ est résoluble : il contient toutes les substitutions de L; et comme nous admettons qu'il ne peut être plus général, il devra se confondre avec L.

Mais les substitutions de L qui ne déplacent pas les systèmes sont les F; dans le groupe $(\mathrm{F}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \mathrm{I}, \mathrm{I}', \ldots, \mathrm{J}, \mathrm{J}', \ldots)$, ce sont les F combinées aux I, I′,.... Pour que les deux groupes soient identiques, il faut donc que les substitutions I, I′,... rentrent toutes dans F.

Nous obtenons donc la proposition suivante :

Lemme IV. — *Toutes les substitutions de* L *résultent de la combinaison des substitutions* F, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., J, J′, ..., etc.

9. Les substitutions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,..., J, J',... permutent les systèmes entre eux, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes : elles forment entre ces q systèmes, considérés chacun comme un tout d'une seule pièce, un groupe de substitutions Δ, qui sera résoluble et primitif comme nous l'avons vu plus haut.

Le groupe F est formé par la combinaison d'une série de substitutions qui ne déplacent chacune que les lettres d'un seul système. Soient respectivement $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$, $\Gamma_{x_0,y_0,z_0,\ldots}$ les groupes formés en réunissant celles de ces substitutions qui déplacent les lettres des systèmes respectivement caractérisés par les indices 0, 0, 0,..., x_0, y_0, z_0,..., etc. Le groupe F résultera de la combinaison de ces groupes partiels.

Les divers groupes $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$, $\Gamma_{x_0,y_0,z_0,\ldots}$ sont les transformés d'un seul d'entre eux, tel que $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$ par les substitutions ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,...). En effet, la substitution $\mathcal{A}^{-x_0}\mathcal{B}^{-y_0}\mathcal{C}^{-z_0}\ldots$ transforme les $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$ en d'autres substitutions, également comprises dans F et ne déplaçant que les lettres du seul système x_0, y_0, z_0,...; ces transformées sont donc comprises dans le groupe $\Gamma_{x_0,y_0,z_0,\ldots}$. Réciproquement, toute substitution dont la transformée ne déplacera que les lettres du système x_0, y_0, z_0,... ne devra elle-même déplacer que celles du système 0, 0, 0,..., et sera comprise dans $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$. $\Gamma_{x_0,y_0,z_0,\ldots}$ sera donc précisément le groupe transformé de $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$ par $\mathcal{A}^{-x_0}\mathcal{B}^{-y_0}\mathcal{C}^{-z_0}\ldots$.

Lemme V. — Ainsi *les substitutions* L *résulteront toutes de la combinaison d'un groupe résoluble et primitif* Δ *qui permute les* p^n *systèmes tout d'une pièce, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes, avec un groupe résoluble* $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$ *qui laisse toutes les lettres immobiles, excepté les* r *lettres du premier système, qu'il permute entre elles.*

10. *Soient réciproquement* Δ et $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$ *deux groupes quelconques satisfaisant à ces conditions : le groupe résultant de leur combinaison sera résoluble.*

En effet, les premières substitutions de Δ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, etc.,..., transformeront respectivement $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$ en une suite de groupes pareils $\Gamma_{0,0,0,\ldots}$, $\Gamma_{x_0,y_0,z_0,\ldots}$ déplaçant chacun les lettres de l'un des systèmes.

Ces groupes déplaçant des lettres différentes sont échangeables entre eux, et formeront par suite, par leur réunion, un groupe résoluble F auquel les $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ seront permutables. Les autres substitutions de Δ le seront également (n° 8, 4°). Le groupe L, dérivé de F et de Δ, ou, ce qui revient au même, de $\Gamma_{0,0,0}, \ldots$ et de Δ, sera donc résoluble.

Pour que le groupe L soit aussi général que possible, il faudra évidemment que les deux groupes Δ et $\Gamma_{0,0,0}, \ldots$ aient été chacun de son côté choisis aussi généraux que possible. Enfin, *le groupe* $\Gamma_{0,0,0}, \ldots$ *doit être transitif.* Car si ses substitutions ne permettaient de faire succéder à une lettre donnée qu'une partie des lettres du premier système, ces substitutions, combinées aux Δ, ne permettraient de lui faire succéder que ces mêmes lettres, jointes aux lettres correspondantes des autres systèmes. Le groupe L ne serait donc pas transitif.

Remarque. — Si Δ et $\Gamma_{0,0,0}, \ldots$ contiennent respectivement N et N′ substitutions, F en contiendra évidemment N'^{p^n} et L en contiendra NN'^{p^n}.

En récapitulant tout ce qui précède, nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit* L *un des groupes résolubles transitifs, mais non primitifs, les plus généraux entre* m *lettres : soit* q *le nombre des systèmes de lettres dans celle des répartitions, s'il en existe plusieurs, pour laquelle ce nombre est minimum; soit* r *le nombre des lettres de chaque système.*

Le groupe L *s'obtiendra en réunissant les substitutions résultant de la combinaison des deux groupes partiels suivants :*

1° *Un groupe résoluble* Δ, *dont les substitutions déplacent les systèmes d'un mouvement d'ensemble, sans altérer l'ordre des lettres dans leur intérieur : les déplacements des* q *systèmes entre eux formant d'ailleurs un groupe transitif, primitif et général.*

2° *Un groupe* Γ, *laissant toutes les lettres immobiles, à l'exception des* r *lettres de l'un des systèmes, le premier, par exemple, qu'il permute entre elles et à l'égard desquelles il est résoluble, transitif et général.*

11. Si ce dernier groupe Γ n'est pas primitif, que q' y soit le nombre des systèmes, $r' = \frac{r}{q'}$ celui des lettres de chacun d'eux, le groupe Γ peut à son tour se décomposer en deux autres Δ' et Γ', dont le premier permutera les q' systèmes entre eux d'une manière primitive; l'autre permutera entre elles les r' lettres d'un même système; si ce dernier n'est pas primitif, on pourra poursuivre la réduction, etc.

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème II. — *La détermination des groupes résolubles, généraux et transitifs, mais non primitifs, relatifs à une décomposition quelconque du nombre m en facteurs successifs* q, q', q'',..., *se ramène à celle des groupes primitifs* Δ, Δ', Δ'',... *entre* q *lettres, entre* q' *lettres, etc.*

Remarque I. — Pour que cette détermination soit possible, il faut que chacun des facteurs q, q',... soit une puissance de nombre premier (chap. II).

Remarque II. — Soient respectivement N, N', N'',... les nombres de substitutions des groupes Δ, Δ', Δ'',... : celui des substitutions du groupe non primitif, formé au moyen de ceux-là, sera évidemment $NN'^{q}N''^{qq'}\ldots$.

CHAPITRE IV.

CLASSIFICATION DES GROUPES RÉSOLUBLES.

Les résultats précédents suggèrent tout naturellement l'idée de répartir les types d'équations irréductibles et résolubles par radicaux d'un degré donné m en classes, suivant celle des décompositions de la forme $m = p^n p'^{n'} \ldots$, à laquelle appartiennent respectivement les groupes de ces équations.

Mais, pour que cette classification soit juste, il faut être certain que les groupes construits par notre méthode sont généraux et distincts les uns des autres, ce qui n'a pas été suffisamment établi jusqu'à présent. En effet, étant donnée une décomposition quelconque $m = p^n p'^{n'} \ldots$

nous avons appris à former les groupes résolubles les plus généraux parmi ceux qui sont relatifs à cette décomposition; mais il pourrait se faire que ces groupes fussent identiques, à la notation près, à certains groupes relatifs à d'autres décompositions ou à d'autres groupes non généraux contenus dans ceux-là. Nous allons prouver qu'il existe effectivement un cas, et *un seul*, où cette circonstance se présente.

Théorème I. — *Aucun groupe relatif à une décomposition de* m *où deux facteurs successifs soient égaux à* 2 *ne peut être général.*

Soient, en effet,

$$m = p^n \cdot 2 \cdot 2 \cdot p'''^{n'''} \ldots$$

la décomposition considérée, Δ, Δ', Δ'', Δ''',... les groupes successifs qui, combinés ensemble, reproduisent le groupe considéré G : les lettres peuvent être groupées en systèmes et en hypersystèmes choisis de telle sorte, 1° que le groupe (Δ'''...) permute entre elles des lettres du premier système sans déplacer les autres; 2° que le groupe (Δ', Δ'') permute entre eux les systèmes du premier hypersystème, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes, sans déplacer les lettres des autres hypersystèmes; 3° enfin le groupe Δ permute entre eux les hypersystèmes.

Le nombre des systèmes que contient le premier hypersystème est égal à $2 \cdot 2 = 4$. Désignons-les par $S_{0,0}$, $S_{0,1}$, $S_{1,0}$, $S_{1,1}$: Δ'' se compose de la substitution 1, jointe à une autre substitution qui permute $S_{0,0}$ et $S_{0,1}$, sans déplacer les deux autres systèmes; Δ' se compose de la substitution 1, jointe à une autre substitution qui remplace $S_{0,0}$ et $S_{0,1}$ par $S_{1,0}$ et $S_{1,1}$, et réciproquement. Ces substitutions, combinées entre elles, forment un groupe qui contient évidemment huit substitutions distinctes, toutes comprises parmi les vingt-quatre substitutions que l'on obtient en permutant de toutes les manières possibles les quatre systèmes ci-dessus. Ces dernières substitutions forment un groupe k résoluble (car on sait que l'équation générale du quatrième degré est résoluble), et plus général que (Δ', Δ''). Cela posé, le groupe dérivé de Δ, k, Δ''',... est évidemment résoluble, et plus général que G.

Théorème II. — *Soit* G *un groupe résoluble, correspondant à une*

décomposition $m = p^n p'^{n'} p''^{n''} \ldots$ *et formé de groupes partiels* $\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$. *En réunissant, dans un premier système, d'abord toutes les lettres que déplace le groupe partiel* $(\Delta', \Delta'', \ldots)$, *puis celles-là seulement que déplace* $(\Delta'' \ldots)$, *etc., on obtient évidemment une suite de groupements des lettres en* p^n *hypersystèmes* $H, H_1, \ldots$, *contenant* $p'^{n'} p''^{n''} \ldots$ *lettres, puis en* $p^n p'^{n'}$ *systèmes ne contenant plus que* $p''^{n''} \ldots$ *lettres, etc. Mais il sera impossible de trouver aucun autre groupement des lettres en systèmes tels, que chaque substitution de* G *remplace les lettres d'un système par celles d'un même système.*

Supposons, en effet, un semblable groupement effectué. Soient $\Sigma, \Sigma', \ldots$ les nouveaux systèmes; admettons, pour fixer les idées, que toutes les lettres de Σ appartiennent au même hypersystème H, mais que deux d'entre elles, a et a_1, appartiennent à deux systèmes différents S et S_1. Les substitutions $(\Delta'' \ldots)$, n'altérant que le système S, ne déplacent pas a_1 : donc elles remplacent les lettres de Σ les unes par les autres, mais elles font succéder à a les diverses lettres de S; donc toutes les lettres de S font partie de Σ. De même, le groupe transformé de $(\Delta'' \ldots)$ par celle des substitutions Δ' qui remplace S par S_1 ne déplace pas a et fait succéder à a_1 les diverses lettres de S_1 : donc ces lettres font partie de Σ. De même, si Σ contient une lettre d'un autre système S_2, il les contiendra toutes. Σ contient toutes les lettres de H, car, s'il n'en était pas ainsi, H contiendrait un système S' dont les lettres ne feraient pas partie de Σ; mais Δ' contient une substitution qui remplace S par S', elle remplacerait les systèmes $S, S_1, S_2, \ldots$, qui forment Σ, par d'autres systèmes $S', S'_1, S'_2, \ldots$ dont la réunion formerait un des nouveaux systèmes, Σ'. De même, si S'' était un autre système contenu dans H, H contiendrait une nouvelle suite de systèmes $S'', S''_1, S''_2, \ldots$ constituant un des nouveaux systèmes, Σ'', etc. Chacune des substitutions Δ' devant remplacer les lettres de chacun des systèmes $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$, par les lettres d'un même système, remplacerait les systèmes de chacune des suites $S, S_1, S_2, \ldots, S', S'_1, S'_2, \ldots$, etc., par les systèmes d'une même suite : elles ne permuteraient donc pas ces systèmes primitivement, comme cela doit être.

Σ contenant ainsi toutes les lettres de H, et n'en contenant, par hypothèse, aucune autre, se confond avec H; et les autres systèmes Σ', etc.,

se confondront avec $H_1, \ldots$, etc., que les Δ font succéder à H. On se trouve ainsi retomber sur un des anciens groupements.

Théorème III. — *Un groupe résoluble non primitif* G, *formé par notre méthode entre p^n lettres* (*p étant premier*), *ne peut être contenu dans un groupe primitif* (*sauf le cas où $p = 2$, $n = 2$*).

En effet, soient p^α le nombre des systèmes de G, choisis de manière à contenir chacun le moins possible de lettres; $p^{n-\alpha}$ le nombre de lettres de chacun d'eux.

Soient ε, u, u',..., $u^{n-\alpha-1}$ les indices variables, le premier de 0 à $p^\alpha - 1$, les autres de 0 à $p-1$, qui servent à caractériser les diverses lettres. Le groupe G contient un groupe partiel Γ dont les substitutions déplacent les lettres du premier système, en laissant les autres immobiles : chacune d'elles déplacera donc au maximum $p^{n-\alpha}$ lettres. On doit même remarquer que Γ contient, outre les substitutions

$$\left|\begin{array}{ll} 0 & 0 \\ u & u+\beta \\ u' & u'+\beta' \\ \ldots & \ldots \end{array}\right|,$$

qui forment un premier faisceau, d'autres substitutions autres que l'unité et de la forme linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} 0 & 0 \\ u & au+bu'\ldots \\ u' & a'u+b'u'\ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}\right|:$$

ces dernières substitutions, laissant immobile la lettre dont les indices sont 0, 0, 0,..., déplaceront moins de $p^{n-\alpha}$ lettres. Cette remarque ne se trouverait en défaut que si l'on avait à la fois $p = 2$ et $n - \alpha = 1$, cas où il n'existerait qu'une seule substitution linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} 0 & 0 \\ u & u \end{array}\right|$$

se réduisant à l'unité.

D'autre part, soit $\mathcal{G}$ un groupe résoluble primitif : les lettres étant caractérisées par n indices, $x, y, \ldots$, ses substitutions seront de la forme

$$\left| \begin{matrix} x & cx + dy + \ldots + \gamma \\ y & c'x + d'y + \ldots + \delta \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right|.$$

Pour qu'une substitution S de cette forme laisse immobile la lettre dont les indices sont $x, y, \ldots$, il faut qu'on ait à la fois

$$\left.\begin{matrix} x \equiv cx + dy + \ldots + \gamma, & \text{d'où} & (c-1)x + dy + \ldots + \gamma \equiv 0 \\ y \equiv c'x + d'y + \ldots + \delta, & \text{d'où} & c'x + (d'-1)y + \ldots + \delta \equiv 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\} \pmod{p}.$$

Ces congruences se réduisent à des identités si $c = 1$, $d = 0$, $\gamma = 0$, $c' = 0, \ldots$, auquel cas S se réduit à l'unité. Dans le cas contraire, l'une au moins de ces relations ne sera pas identique : supposons, par exemple, que la première ne le soit pas : si elle se réduit à $\gamma \equiv 0 \pmod{p}$, elle devient impossible à satisfaire : donc S déplace toutes les lettres : dans le cas contraire, l'un des coefficients des variables, $c - 1$ par exemple, sera $\gtrless 0 \pmod{p}$. On pourra alors prendre arbitrairement $y, \ldots$, et pour chaque système de valeurs de ces indices, dont le nombre est p^{n-1}, l'indice x sera déterminé par la relation

$$(c-1)x + dy + \ldots + \gamma \equiv 0 \pmod{p}.$$

On a donc p^{n-1} lettres seulement satisfaisant à cette dernière relation, et par suite p^{n-1} lettres au plus restant immobiles : donc $p^n - p^{n-1}$ lettres au moins sont déplacées.

Mais si $\mathcal{G}$ contenait G, l'une de ses substitutions déplacerait moins de $p^{n-\alpha}$ lettres (ou $p^{n-\alpha}$ lettres, si $p^{n-\alpha} = 2$) : d'où l'inégalité impossible

$$p^{n-\alpha} > p^n - p^{n-1} > p^{n-1}(p-1).$$

Si $p^{n-\alpha}$ se réduit à 2, on aurait à la place de cette inégalité l'égalité

$$2 = p^{n-\alpha} = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1), \quad \text{d'où} \quad p^{n-1} = 2 \quad \text{et} \quad p^n = 4.$$

C'est le cas d'exception déjà trouvé.

Théorème IV. — *Deux groupes* G, G_1, *construits d'après notre méthode, ne peuvent être contenus l'un dans l'autre si les deux décompositions du nombre m*, $p^n p'^{n'} p''^{n''}, \ldots$ *et* $\pi^\nu \pi'^{\nu'} \pi''^{\nu''} \ldots$ *auxquelles ils correspondent respectivement, ne sont pas identiques. (On suppose que dans aucune des deux décompositions on n'a deux facteurs successifs égaux à* 2.)

En effet, les lettres peuvent être groupées dans G_1 en π^ν systèmes contenant chacun $\pi'^{\nu'} \pi''^{\nu''} \ldots$ lettres, et tels, que chaque substitution de G_1 remplace les lettres d'un système par celles d'un même système : si G est contenu dans G_1, ses substitutions jouiront *à fortiori* de la même propriété : mais nous avons vu (théorème II) que les lettres de G ne peuvent être groupées en π^ν systèmes que si π^ν est égal à l'un des nombres p^n, $p^n p'^{n'}, \ldots$.

Soit, pour fixer les idées,

$$\pi^\nu = p^n p'^{n'}.$$

Le groupe G résulte de la combinaison de deux autres : l'un $(\Delta'' \ldots)$ déplaçant les lettres du premier système seulement, l'autre (Δ, Δ') déplaçant les systèmes d'un mouvement d'ensemble. De même G_1 résultera de deux groupes, dont l'un $(\Delta'_1, \Delta''_1, \ldots)$ déplace les lettres du premier système seulement, l'autre Δ_1 déplaçant les systèmes d'un mouvement d'ensemble. G étant contenu dans G_1, il est clair que $(\Delta'' \ldots)$ et (Δ, Δ') devraient être respectivement contenus dans $(\Delta'_1, \Delta''_1, \ldots)$ et Δ_1. Cela est impossible : car (Δ, Δ'), étant non primitif, ne peut être contenu dans Δ_1, qui est primitif (théor. III).

On voit donc qu'on aura nécessairement

$$\pi^\nu = p^n, \quad \text{d'où} \quad \pi'^{\nu'} \pi''^{\nu''} \ldots = p'^{n'} p''^{n''}, \ldots :$$

et, que pour que G soit contenu dans G_1, il sera nécessaire et suffisant que Δ soit contenu dans Δ_1 et $(\Delta', \Delta'' \ldots)$ dans $(\Delta'_1, \Delta''_1, \ldots)$. Mais notre construction suppose que Δ est un groupe primitif aussi général que possible : donc Δ étant contenu dans Δ_1 se confond avec lui. On verra de même que pour que $(\Delta', \Delta'', \ldots)$ soit contenu dans $(\Delta'_1, \Delta''_1, \ldots)$, il faut que $p'^{n'} = \pi'^{\nu'}$, et que Δ', $(\Delta'' \ldots)$ soient respectivement contenus dans Δ'_1, $(\Delta''_1 \ldots)$,.... Le théorème se trouve ainsi démontré.

Les résultats obtenus dans ce chapitre peuvent donc se résumer ainsi qu'il suit :

Théorème. — *Les décompositions $m = p^n p'^{n'} \ldots$, dans lesquelles deux facteurs successifs sont à la fois égaux à 2, ne fournissent aucun groupe général.*

Ces décompositions étant exclues, il existera autant de classes distinctes d'équations irréductibles et solubles par radicaux du degré m qu'il reste d'autres décompositions.

Le nombre des types distincts d'équations irréductibles et solubles par radicaux de la classe correspondante à la décomposition $m = p^n p'^{n'} \ldots$ est égal à $qq' \ldots$, q, q',..., désignant respectivement les nombres de types distincts de groupes résolubles et primitifs pour les degrés p^n, $p'^{n'} \ldots$.

CONSIDÉRATIONS

A l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés;

PAR M. BIENAYMÉ [*].

Extrait des *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, séance du 29 août 1853.

Dans la séance du 8 août 1853, l'Académie a entendu des remarques, des réflexions faites par M. Cauchy et par M. Le Verrier sur la méthode des moindres carrés. Ces réflexions n'ont pas été insérées dans le *Compte rendu*, à mon grand regret, car elles m'avaient paru d'un intérêt véritable. Il n'a été publié que le Mémoire de M. Cauchy, dont la lecture avait fourni l'occasion de cette espèce de discussion; et je n'ai point vu reproduite une opinion qui m'avait semblé le diriger dans ses observations verbales. M. Cauchy avait nié l'exactitude du résultat si remarquable, découvert et démontré par Laplace, et qui consiste en ce que la méthode des moindres carrés s'applique aux données des observations, quelle que soit la loi de probabilité des erreurs. J'ai cru pouvoir annoncer, alors, que j'aurais quelques bonnes raisons peut-être à présenter à l'appui de l'opinion de Laplace. Je viens les exposer le plus brièvement possible; quoique je sois en droit de faire remarquer cependant que les divers Mémoires ou morceaux de Mémoires publiés par notre savant confrère, dans les nos 5, 6 et 7 du *Compte rendu*, ne justifient nullement son assertion. Loin de là,

[*] Depuis longtemps nous nous proposions de reproduire dans le *Journal de Mathématiques* l'important travail de M. Bienaymé. Quatorze années se sont écoulées; nous croyons pourtant que nos lecteurs l'accueilleront encore aujourd'hui avec un vif intérêt. (J. L.)

selon moi, il y a telles parties de cette analyse si féconde, et parfois très-ingénieuse, qui, avec bien peu de changements, démontreraient pleinement la découverte de Laplace. Et si je me borne à l'indiquer, c'est que je ne veux pas même avoir l'air d'en faire la critique.

La critique n'est point mon but. Les travaux critiques que j'aurai à présenter successivement à l'Académie montreront que ce n'est, à mes yeux, entre mes mains, qu'un instrument dont je suis obligé de me servir pour parvenir à la vérité. Le calcul des probabilités donne lieu à de singulières illusions, auxquelles les meilleurs esprits n'ont pu toujours se soustraire. Ce calcul est le premier pas des Mathématiques hors du domaine de la vérité absolue. Elles ne l'ont fait qu'en tâtonnant, pour ainsi dire. Laplace intitule un de ses chapitres : *Des illusions dans l'estimation des probabilités.* Aussi trouve-t-on plus d'une erreur étayée d'un nom recommandable, plus d'une méprise échappée à des hommes qui font autorité. La science, quoique Pascal l'ait créée il y a deux siècles, n'est pas bien loin de son origine. Le développement analytique a progressé presque seul. Or, dans ces commencements d'une science, celui qui cherche le vrai semble parfois user d'une critique bien rigoureuse, alors qu'il s'efforce seulement de sortir de l'obscurité, de faire évanouir les fantômes qu'on y croit apercevoir. Il se voit contraint tout à la fois de réduire à d'étroites limites les avantages que trop de précipitation, trop d'imagination avaient fait exagérer outre mesure; de mettre en évidence les inconvénients que l'ardeur des premiers succès avait dissimulés; parfois aussi, de maintenir les points justement acquis par la science contre des préventions, des jugements inexacts qui la feraient rétrograder. En un mot, il est forcé de déblayer le terrain, et de le défendre pour que ses successeurs puissent y avancer avec sécurité. C'est ce que peut seule faire une critique impartiale. Et puis, il faut bien le dire, la nature même du calcul des probabilités, qui traite des erreurs de toute espèce, des écarts de tout genre, de l'incompatibilité des observations résultant de la faiblesse des organes humains, de la discordance des données statistiques, discordance que produisent les variations physiques, très-étendues le plus souvent, et la négligence ou l'impéritie avec lesquelles ces variations se constatent; la nature de ce calcul qui traite de tous ces faits pour lesquels a été forgé le mot

de hasard, si peu intelligible; la nature même de ce calcul est critique.

J'aurai donc besoin, pour ce caractère de plusieurs de mes communications futures, d'une bienveillante disposition de l'auditeur ou du lecteur. Je la sollicite d'avance. Il y a, du reste, bien longtemps que la plupart de mes recherches ont été faites. Les démonstrations de certaines erreurs remontent à plus de trente ans. J'ose espérer qu'on voudra bien reconnaître, dans le long silence où elles sont demeurées, la preuve d'une absence complète du désir de critiquer. D'ailleurs, j'agirai comme je l'ai déjà fait; je réduirai la critique au strict nécessaire, et je crois que M. Cauchy le verra dans ma communication actuelle.

Et cependant l'opinion de Laplace sur le sujet qui nous occupe mériterait bien que toutes les ressources possibles fussent employées à la soutenir. Il ne s'agit pas ici seulement de la méthode des moindres carrés, d'une combinaison d'équations à résoudre, qu'on pourrait remplacer, sans grand dommage, par une autre combinaison. Peut-être, s'il ne s'était agi que des erreurs des observations, n'aurais-je pas pris la parole il y a trois semaines; bien que je dusse supposer que j'étais un peu cause de l'amoindrissement que notre savant confrère voulait faire subir à la méthode des moindres carrés. Mais voici pourquoi j'ai dû parler. C'est, qu'on le sache bien, que si la découverte de Laplace est inexacte, une partie considérable de son grand ouvrage, la partie la meilleure, en ce qu'elle est la plus applicable, la plus pratique, se trouvera renversée d'un seul coup. Tous les chapitres qui traitent *de la recherche des phénomènes et de leurs causes; de la probabilité des causes et des événements futurs tirée des événements observés; des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques; des bénéfices des établissements basés sur la probabilité des événements, etc.,* suivront plus ou moins complétement le sort du célèbre chapitre IV *sur la probabilité des erreurs des résultats moyens,* où se trouve démontrée la méthode que Legendre avait fondée sur des considérations si différentes. Car tous ces chapitres sont appuyés sur un principe commun, sur la réduction d'une fonction quelconque à des termes communs à toutes, et faciles à calculer.

Aussi Laplace avait-il senti sur-le-champ l'importance de sa décou-

verte. A peine l'eut-il faite, qu'il l'apporte devant cette compagnie, et qu'il annonce qu'il va publier un Traité des probabilités. De 1770 à 1809, pendant près de quarante ans, Laplace avait donné des Mémoires nombreux sur les probabilités : mais, quelque intérêt qu'il y eût dans ces Mémoires, il n'avait pas voulu les rédiger en théorie générale. Aussitôt qu'il a reconnu la propriété des fonctions de probabilités, il voit clairement que c'est un principe qui régit presque toutes les applications, et il compose sa théorie.

On a dit souvent que cette théorie rendrait, seule, immortel le nom de Laplace. Mais je suis fondé à croire que ces paroles ne portaient que sur les beaux développements d'analyse qui lui sont dus; et que le principe de probabilités, si général, si fécond, n'a frappé les yeux que d'un bien petit nombre de personnes. S'il n'en était ainsi, je suis persuadé qu'au lieu de l'ébranler, de le révoquer en doute, on s'efforcerait de le consolider, et de montrer comment Laplace l'a entendu; comment on peut en abuser par des applications mal conçues, ou incomplètes; comment enfin les progrès de l'analyse peuvent servir à répandre le jour sur le calcul des probabilités. Mais plusieurs n'y ont vu qu'une occasion de problèmes d'analyse, et ceux qui ont cherché l'esprit de cette analyse se sont épuisés en vains efforts pour remplacer les calculs de Laplace par ce qu'on appelle des *démonstrations faciles*, des *preuves populaires*.

Jusqu'ici, il ne semble pas possible d'opérer ce remplacement dès qu'on veut connaître la grandeur de la probabilité d'une erreur donnée. L'analyse suivie par Poisson, l'analyse que M. Cauchy vient d'employer avec un peu plus de cette rigueur qui doit régir les Mathématiques, ne donnent, en fait de calculs numériques, de vraies applications pratiques, rien de plus que les formules si commodes que Laplace a su tirer de la sienne.

Mais si l'on veut se borner à démontrer la méthode des moindres carrés en ce qui touche la combinaison des observations, sans calculer la grandeur de l'erreur et seulement en prouvant que cette méthode opère de manière à la rendre un minimum, il ne faut plus d'analyse transcendante, ni même de grande contention d'esprit, une fois qu'on a bien envisagé les conditions qui font un principe général de la découverte de Laplace.

Deux choses, en effet, ont toujours surpris, et surprendront toujours, quand, pour la première fois, on vient à considérer le résultat final qu'il a livré aux observateurs. C'est, d'une part, que l'intégrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a dt e^{-t^2}$ se reproduit sans cesse, comme expression approchée de la probabilité; et de l'autre, que les écarts ou les erreurs sont proportionnels à la limite de cette intégrale, et à une fonction de la moyenne des carrés des différences entre chaque erreur possible et sa moyenne. C'est là tout ce qu'il reste, dans l'approximation de Laplace, du caractère primitif de la fonction de probabilité qui régnait pendant les observations.

Il semble, au premier abord, qu'il y ait un lien mystérieux entre les probabilités et cette intégrale qui s'est présentée à M. Gauss dans ses premières recherches, comme une conséquence du principe de la moyenne arithmétique qu'il adoptait gratuitement, et qui est ensuite ressortie de l'analyse de Laplace, basée uniquement sur ce que les observations sont en grand nombre. Aussi, plus d'un savant a-t-il pensé qu'une connaissance mieux approfondie de la théorie des probabilités amènerait à reconnaître que la loi de probabilité des erreurs est représentée par la fonction $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. Mais c'est là une de ces vues inexactes qui conduisent à des conséquences erronées : et celle-ci en a produit en grand nombre, tant au point de vue théorique que dans les résultats pratiques. Il suffira de dire ici qu'il n'y a pas de liaison nécessaire entre cette exponentielle et les lois de probabilités; qu'elle n'est qu'un moyen d'approximation très-commode, mais qui pourrait être remplacé par d'autres formules; que ce qui la ramène sans cesse, c'est qu'elle est très-propre à représenter une fonction aux environs du maximum, mais qu'elle ne la représente qu'à peu près; et que même dans les questions où elle offre le plus de facilité comme approximation, elle donne fréquemment des résultats dont la fausseté est manifeste dès qu'on veut l'employer à des raisonnements un peu complexes, au lieu de la tenir pour ce qu'elle est réellement, c'est-à-dire pour une pure machine arithmétique, bonne aux calculs numériques.

Mais il n'en est pas ainsi de la moyenne des carrés des différences des erreurs à leur moyenne. Ce n'est pas un élément arbitraire de

l'approximation, ni, comme le croyait M. Gauss, une mesure arbitraire de la précision, à laquelle on pourrait substituer toute autre moyenne de puissances de degré pair. Tout au contraire, la moyenne des carrés renferme la condition fondamentale du développement des probabilités à mesure que les observations se multiplient; et s'il n'est pas permis de dire *à priori* qu'on ne saurait trouver quelque fonction plus avantageuse (autre que les moyennes de degré pair), on peut affirmer que dans l'hypothèse d'une telle découverte la fonction pourrait être remplacée par un emploi convenable de la moyenne des carrés.

La raison en est bien simple. Pour l'expliquer, je prendrai, comme l'a fait M. Cauchy, le cas le plus ordinaire de la méthode des moindres carrés.

Lorsqu'on veut résoudre un système d'équations du premier degré où entrent des quantités observées ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$, qui sont affectées de certaines erreurs égales respectivement à ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$, on multiplie chacune de ces équations par un des facteurs arbitraires h_1, h_2, $h_3, \ldots$, assujettis à faire disparaître toutes les inconnues, sauf une seule, que l'on obtient sous la forme

$$x = h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 + h_3 \omega_3 + \ldots,$$

de sorte que l'erreur de x a pour valeur

$$\xi = h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2 + h_3 \varepsilon_3 + \ldots.$$

En général, l'erreur ξ est susceptible de toutes les valeurs possibles, parce que les signes des coefficients et ceux des erreurs sont déjà déterminés, et qu'on ne peut disposer complétement des facteurs h, qui doivent satisfaire à $i - 1$ équations, s'il y a i inconnues, afin d'en éliminer $i - 1$.

Il s'agit donc, pour obtenir la probabilité de ξ, d'examiner quelle est la loi de probabilité d'une somme de n produits, s'il y avait n équations, chaque produit formé d'une erreur multipliée par un facteur donné.

Soit b_i la probabilité d'une erreur ε_i, de manière que la somme

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = 1,$$

comme cela doit être; et considérons le polynôme

$$b_1 z^{\alpha_1} + b_2 z^{\alpha_2} + b_2 z^{\alpha_3} + \ldots = \mathrm{S}.bz^{\alpha} = \varphi(z),$$

dans lequel un exposant α_i est une fonction déterminée de l'erreur ε_i.

Si l'on fait, de même,

$$\mathrm{S}.bz^{\beta} = \psi(z), \quad \mathrm{S}.bz^{\gamma} = \chi(z), \ldots,$$

β, γ, etc., étant des fonctions des erreurs, il est évident que le produit

$$\mathrm{S}.bz^{\alpha} \times \mathrm{S}.bz^{\beta} \times \mathrm{S}.bz^{\gamma} \times \ldots = \varphi(z).\psi(z).\chi(z)\ldots = \mathrm{P}$$

aura dans chacun de ses termes, comme exposant, l'une des valeurs de toutes les sommes que l'on peut former en ajoutant n des quantités α, β, γ, etc., prises à volonté, et pour coefficient la probabilité de cette valeur. Ainsi ce produit P, ordonné par rapport à la grandeur des exposants de z, quels qu'ils soient, présentera la loi de probabilité des sommes dont une seule a pu se rencontrer dans les expériences ou observations; de même que $\varphi(z) = \mathrm{S}.bz^{\alpha}$ présente la loi de probabilité des quantités α. Désignant par σ_i l'une des sommes

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

et par B_i la probabilité correspondante, on pourra écrire $\mathrm{P} = \mathrm{S}.\mathrm{B}z^{\sigma}$, et ce qui va être dit de $\varphi(z)$ s'appliquera au produit P.

On sait que les dérivées logarithmiques de $\varphi(z)$ seront

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \quad \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} - \left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]^2, \quad \frac{\varphi'''(z)}{\varphi(z)} - 3\,\frac{\varphi''(z)\,\varphi'(z)}{(\varphi z)^2} + 2\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]^3,$$

$$\frac{\varphi^{\text{iv}}(z)}{\varphi(z)} - 4\,\frac{\varphi'''(z)\,\varphi'(z)}{[\varphi(z)]^2} - 3\,\frac{[\varphi''(z)]^2}{[\varphi(z)]^2} + 12\,\frac{\varphi''(z)\,[\varphi'(z)]^2}{[\varphi(z)]^3} - 6\,\frac{[\varphi'(z)]^4}{[\varphi(z)]^4}, \ldots.$$

Mais on sait aussi que les dérivées logarithmiques d'un produit

$$\mathrm{P} = \varphi(z)\,\psi(z)\,\chi(z)\ldots$$

sont respectivement les sommes des dérivées de même ordre des loga-

rithmes des facteurs

$$\frac{d^n(\mathrm{l.\,P})}{dz^n} = \frac{d^n[\mathrm{l.}\,\varphi(z)]}{dz^n} + \frac{d^n[\mathrm{l.}\,\psi(z)]}{dz^n} + \frac{d^n[\mathrm{l.}\,\chi(z)]}{dz^n} + \ldots$$

Quel que soit cet ordre, cette dérivée, si le produit se réduit à une puissance, est donc simplement égale à n fois la dérivée de l'unique facteur de la puissance. Cette propriété singulière est un des fondements du calcul des probabilités, comme on le reçonnaît en examinant ce que deviennent ces dérivées, alors qu'on y fait disparaître la variable z, qui n'a été introduite que pour porter les exposants.

On peut remarquer, d'abord, que la première dérivée de $\varphi(z)$ est

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\mathrm{S}.\, b\alpha z^{\alpha-1}}{\mathrm{S}.\, b z^{\alpha}},$$

et que, partant, pour $z = 1$, cette dérivée se réduit à $\mathrm{S}.b\alpha$, c'est-à dire à la moyenne des quantités α. On en conclut que dans le produit P, la première dérivée logarithmique est de même la moyenne $\mathrm{S.B}\sigma$; et comme cette première dérivée est nécessairement la somme des premières dérivées de chacun des facteurs, il en ressort immédiatement que la valeur moyenne des sommes σ des quantités α, β, γ, etc., est la somme des valeurs moyennes de ces quantités, c'est-à-dire qu'on a

$$\mathrm{S.B}\sigma = \mathrm{S}.b\alpha + \mathrm{S}.b\beta + \mathrm{S}.b\gamma + \ldots$$

Si respectivement $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = \ldots$, il vient

$$\mathrm{S.B}\sigma = n\mathrm{S}.b\alpha.$$

Si $\alpha_i = h_1\varepsilon_i$, $\beta_i = h_2\varepsilon_i$, $\gamma_i = h_3\varepsilon_i$, etc., on obtient alors

$$\mathrm{S.B}\sigma = (h_1 + h_2 + h_3 + \ldots)\,\mathrm{S}.b\varepsilon.$$

Ces formules étaient connues. Elles expriment ce qu'on peut appeler la conservation de la moyenne arithmétique, dans les successions d'événements composés d'événements simples soumis à une même loi de probabilité. La moyenne des sommes d'événements est la somme,

ou un multiple, des moyennes d'événements simples. Avec d'autres conditions, il y aurait d'autres modes de combinaison des moyennes. Celui-là suffit pour ce dont il s'agit en ce moment.

Mais la moyenne arithmétique n'est point la seule qui se conserve ainsi.

On a visiblement

$$\varphi''(z) = \mathrm{S}.b\alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} = \mathrm{S}.b\alpha^2 z^{\alpha-2} - \mathrm{S}.b\alpha z^{\alpha-1};$$

par suite, la seconde dérivée logarithmique

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} - \left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]^2 = \frac{\mathrm{S}.b\alpha^2 z^{\alpha-2} - \mathrm{S}.b\alpha z^{\alpha-1}}{\mathrm{S}.bz^{\alpha}} - \left[\frac{\mathrm{S}.b\alpha z^{\alpha-1}}{\mathrm{S}.bz^{\alpha}}\right]^2;$$

et faisant $z = 1$,

$$\frac{\varphi''(1)}{\varphi(1)} - \left[\frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}\right]^2 = \mathrm{S}.b\alpha^2 - (\mathrm{S}.b\alpha)^2 - \mathrm{S}.b\alpha.$$

Semblablement, la seconde dérivée du produit

$$\mathrm{P} = \mathrm{S}.\mathrm{B}z^{\sigma}$$

sera, pour $z = 1$,

$$\mathrm{S}.\mathrm{B}\sigma^2 - (\mathrm{S}.\mathrm{B}\sigma)^2 - \mathrm{S}.\mathrm{B}\sigma.$$

D'où l'on conclut sur-le-champ, en ayant égard à la valeur de $\mathrm{S}.\mathrm{B}\sigma$,

$$\begin{aligned}\mathrm{S}.\mathrm{B}\sigma^2 - (\mathrm{S}.\mathrm{B}\sigma)^2 &= \mathrm{S}.b\alpha^2 - (\mathrm{S}.b\alpha)^2\\ &+ \mathrm{S}.b\beta^2 - (\mathrm{S}.b\beta)^2\\ &+ \mathrm{S}.b\gamma^2 - (\mathrm{S}.b\gamma)^2 + \ldots.\end{aligned}$$

Posant

$$\mu_\alpha = \mathrm{S}.b\alpha,\quad \mu_\beta = \mathrm{S}.b\beta,\quad \mu_\gamma = \mathrm{S}.b\gamma,\ldots,\quad \mu_\sigma = \mathrm{S}.\mathrm{B}\sigma,$$

on peut remarquer que la moyenne des carrés, diminuée du carré de la moyenne, est égale à la moyenne des carrés des différences de toutes les quantités à leur moyenne; de sorte qu'on trouve

$$\mathrm{S}.\mathrm{B}(\sigma-\mu_\sigma)^2 = \mathrm{S}.b(\alpha-\mu_\alpha)^2 + \mathrm{S}.b(\beta-\mu_\beta)^2 + \ldots.$$

Pour le cas d'égalité des α, β, γ, etc., il vient donc

$$S.B(\sigma - \mu_\sigma)^2 = nS.b(\alpha - \mu_\alpha)^2;$$

et pour le cas de

$$\alpha_i = h_1 \varepsilon_i, \quad \beta_i = h_2 \varepsilon_i, \ldots,$$

comme alors

$$\mu^\alpha = h_1 \mu, \quad \mu_\beta = h_2 \mu, \ldots,$$

si $\mu = S.b\varepsilon$, on obtient

$$S.B(\sigma - \mu_\sigma)^2 = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots) S.b(\varepsilon - \mu)^2.$$

Par conséquent, on voit que la moyenne des carrés des différences entre la moyenne arithmétique et les diverses quantités dont elle se compose se conserve de la même manière que la moyenne. Dans une suite d'événements, elle est un multiple de la moyenne des carrés des écarts des événements simples.

D'après ces résultats, comme Laplace a enseigné à se débarrasser de la moyenne arithmétique, on peut admettre que les quantités α, β, γ, etc., soient déjà diminuées de leurs moyennes dans les polynômes $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$, etc., et alors $\varphi'(z)$, $\psi'(z)$, $\chi'(z)$, etc., se réduiront à zéro pour $z = 1$. Les dérivées logarithmiques se réduiront donc à

$$\varphi''(1), \quad \varphi'''(1), \quad \varphi^{\text{IV}}(1) - 3[\varphi^{\text{v}}(1)]^2, \ldots.$$

Rien n'est plus facile que d'en conclure que

$$\begin{aligned} S.B(\sigma - \mu_\sigma)^3 = {} & S.b(\alpha - \mu_\alpha)^3 \\ & + S.b(\beta - \mu_\beta)^3 \\ & + S.b(\gamma - \mu_\gamma)^3 + \ldots, \end{aligned}$$

ou que la moyenne des cubes des écarts des événements composés est encore la somme des moyennes des cubes des écarts des événements simples. Mais dès la puissance 4e il n'en est plus ainsi, et l'on

trouve, par des calculs analogues aux précédents,

$$\begin{aligned} & \mathrm{S.B}(\sigma-\mu_\sigma)^4 - 3\left[\mathrm{S.B}(\sigma-\mu_\sigma)^2\right]^2 \\ = {} & \mathrm{S.B}(\alpha-\mu_\alpha)^4 - 3\left[\mathrm{S.B}(\alpha-\mu_\alpha)^2\right]^2 \\ + {} & \mathrm{S.B}(\text{ϐ}-\mu_\text{ϐ})^4 - 3\left[\mathrm{S.B}(\text{ϐ}-\mu_\text{ϐ})^2\right]^2 + \ldots \end{aligned}$$

Il en résulte que la moyenne des 4es puissances ne se conserve pas. En effet, pour avoir cette moyenne $\mathrm{S.B}(\sigma-\mu_\sigma)^4$, il faudra ajouter aux deux membres de cette relation $3\left[\mathrm{S.B}(\sigma-\mu_\sigma)^2\right]^2$, qui sera évidemment de l'ordre de n^2 pour $\alpha = \text{ϐ} = \gamma = \ldots$, et de l'ordre de $(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots)^2$, pour le cas de

$$\alpha_i = h_1\,\varepsilon_i, \quad \text{ϐ}_i = h_2\,\varepsilon_i', \ldots$$

Partant, ce terme sera d'un ordre bien supérieur à celui des termes du second membre de la relation, quand n, ou le nombre des observations, sera très-grand : ces termes n'atteignent effectivement que l'ordre n, et offrent des signes différents.

On pourra donc poser

$$\mathrm{S.B}(\sigma-\mu_\sigma)^4 = n^2\mathrm{C} + n\mathrm{C}_1;$$

et dans l'évaluation de cette expression, ce sera surtout au terme en n^2 qu'il faudra avoir égard, et pour n très-grand, à ce terme presque uniquement.

On reconnaît ainsi que c'est seulement

$$\sqrt{\mathrm{S.B}(\sigma-\mu_\sigma)^4} = n\sqrt{\mathrm{C} + \frac{1}{n}\mathrm{C}'}$$

qui conserve l'ordre du grand nombre n.

De plus, comme

$$n^2\mathrm{C} = 3\left[\mathrm{S.}b(\alpha-\mu_\alpha)^2 + \mathrm{S.}b(\text{ϐ}-\mu_\text{ϐ})^2 + \ldots\right]^2,$$

on trouvera

$$\sqrt{\mathrm{S.B}(\sigma-\mu_\sigma)^4} = \left[\mathrm{S.}b(\alpha-\mu_\alpha)^2 + \mathrm{S.B}(\text{ϐ}-\mu_\text{ϐ})^2 + \ldots\right]\sqrt{3 + \frac{3}{n}\cdot\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}}}.$$

Ce qui montre avec évidence comment la considération des 4es puissances ramènerait à discuter simplement la somme ou la moyenne des carrés.

Dans la question qui nous occupe, la somme des cubes, on le voit bien, ne saurait être d'aucune utilité, non plus qu'aucune somme de puissances impaires, parce que ces puissances sont affectées de signes différents dans les termes de côtés opposés de la moyenne; et, par conséquent, les sommes et les moyennes de puissances impaires ne sont réellement que des différences qui ne pourraient servir aux raisonnements qui vont suivre. Il suffit donc de s'arrêter aux puissances paires.

Mais il est bien facile de s'assurer que toute dérivée logarithmique d'ordre pair $2i$ conduira, pour la moyenne des puissances $2i$, à des résultats analogues à celui que donnent les puissances 4es; car il est manifeste que cette dérivée contiendra $[\varphi''(1)]^i$, et que, par suite, $\mathrm{S.B}(\sigma - \mu_\sigma)^{2i}$ contiendra la puissance

$$[\mathrm{S.}b(\alpha - \mu_\alpha)^2 + \mathrm{S.}b(\beta - \mu_\beta)^2 + \ldots]^i,$$

qui sera de l'ordre n^i, ordre supérieur à celui de tous les autres termes. Ainsi ce sera seulement $\sqrt[i]{\mathrm{S.B}(\sigma - \mu_\sigma)^{2i}}$ qui conservera l'ordre de n; et cela uniquement par le grand terme contenant la somme des moyennes des carrés. Il n'y aura donc nul moyen d'éviter la discussion de cette somme.

Ces remarques mettent hors de doute l'erreur commise par M. Gauss, qui, comme je l'ai dit, avait affirmé que le choix de la somme des carrés était arbitraire, et qu'on pourrait à volonté prendre pour mesure des écarts des observations une somme de puissances quelconques (voir *Theoria combinationis observationum minimis erroribus obnoxiæ*). Cela soit dit en passant. Ici les mêmes remarques constatent que la seule moyenne des carrés se conservant dans l'ordre nécessaire, et se représentant dans toutes les sommes de puissances suivantes, il n'y aura pas ouverture à nouvelle discussion.

Maintenant, rien ne sera plus facile que de reconnaître, par l'expression

$$\mathrm{S.B}(\sigma - \mu_\sigma)^2 = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots)\,\mathrm{S.B}(\varepsilon - \mu)^2,$$

qu'il faut rendre un minimum la somme des carrés des facteurs h_i.

Dans la résolution des équations données, ces facteurs sont généralement de l'ordre de $\frac{1}{n}$; et, par suite, la somme de leurs carrés est du même ordre.

Donc la moyenne $S.B(\sigma - \mu_\sigma)^2$ sera d'autant plus rapprochée de zéro (ou du terme milieu du polynôme qui aura zéro pour exposant), que $S.h^2$ sera moindre ou que n sera plus grand. Donc, ce nombre croissant, toute la probabilité dans le produit P se concentrera dans les termes voisins du milieu. Il faut bien qu'il en soit ainsi, puisque le nombre des termes de P est infini, ou, s'il est fini, qu'il est très-grand de l'ordre de n; et que les exposants σ deviennent infinis, ou du moins de ce même ordre très-élevé. Si à une distance un peu considérable du terme milieu, dont la moyenne des carrés se rapproche sans cesse, il subsistait des termes réunissant quelque probabilité, il est manifeste que ce rapprochement deviendrait impossible. Pour n infiniment grand, la moyenne des carrés est infiniment petite; or tous ces termes sont positifs : donc tous ceux dans lesquels entrent des écarts qui ont quelque valeur sensible ne réunissent qu'une probabilité infiniment petite. Il ne reste de probabilité qu'aux écarts les plus voisins de zéro.

Il faut toutefois bien entendre qu'un écart de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sera encore très-voisin de zéro, puisqu'il s'agit de la moyenne des carrés qui est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, et qu'ainsi le carré de cet écart sera bien de l'ordre même de cette moyenne.

Bien avant que n soit infini, on conçoit sans doute actuellement d'une manière nette que quand ce nombre deviendra très-grand, les écarts probables seront très-petits, selon que la moyenne de leurs carrés deviendra plus petite. Ils diminueront avec cette moyenne, et réciproquement elle diminuera avec ces écarts. De sorte qu'en rendant cette fonction un minimum, on renfermera l'erreur dans les limites probables les plus étroites. Mais on sait que cette condition du minimum conduit au procédé que Legendre a appelé *méthode des moindres carrés*. C'est donc cette méthode qu'il faut suivre quand on traite des équations plus nombreuses que les inconnues cherchées.

Si ces considérations ne suffisent pas, on peut calculer au moins la forme de la probabilité, et la marche de la grandeur qu'elle prend avec le nombre croissant des observations.

Supposons, par exemple, que l'erreur doive être comprise entre les limites

$$\pm t\sqrt{2\mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2}.$$

Après n observations, la moyenne des carrés s'exprimant par

$$\mathrm{S}.h^2 \times \mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2 \quad \text{ou bien par} \quad \frac{k}{n}\mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2,$$

le nombre k étant très-petit relativement à n, les limites pour rester constantes prendront la forme

$$\pm \frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{k}}\sqrt{2\frac{k}{n}\mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2}.$$

Mais puisque la moyenne des carrés est $\frac{k}{n}\mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2$, il est clair que les termes de cette moyenne placés au delà des limites ci-dessus ne peuvent en fournir qu'une fraction f. La somme de ces termes est donc

$$\mathrm{S} = f\cdot\frac{k}{n}\mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2.$$

D'un autre côté, p étant la probabilité de tous ces termes au delà des limites, on aura évidemment

$$\mathrm{S} = p\times\frac{1}{\theta}\cdot\frac{t^2 n}{k}\cdot 2\frac{k}{n}\mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2,$$

θ étant inférieur à 1, puisque $t^2.2\mathrm{S}.b(\varepsilon-\mu)^2$ est le plus petit des écarts qui entrent dans les termes en question.

Égalant ces deux valeurs de S, on obtient

$$p = \frac{2t^2}{\theta f}\cdot\frac{k}{n},$$

et la probabilité que l'erreur tombe entre les limites assignées sera

$$1 - p = 1 - \frac{\theta f}{2t^2} \cdot \frac{k}{n}.$$

Ainsi la probabilité croît constamment avec le nombre des observations. Pour une même probabilité, les limites se resserrent donc, ainsi qu'il a été dit.

L'esprit de l'analyse de Laplace est dès lors facilement saisissable; et si l'on veut calculer avec précision la grandeur de la probabilité obtenue, on peut reprendre cette analyse. On pourra, si on le préfère, adapter aussi à ce calcul celle que M. Cauchy a donnée dans le *Compte rendu* de la séance du 16 août, p. 269 et antérieures.

Mais les considérations précédentes ne laissent aucun doute sur les propriétés de la moyenne des carrés. Comme le raisonnement a été général, il s'ensuit que la fonction de probabilité peut être quelconque.

J'ai hâte d'arriver aux exceptions signalées par M. Cauchy, car elles ne modifient nullement l'opinion de Laplace.

Il semble, au premier abord, qu'il n'ait pu dire *une fonction quelconque*, puisqu'il faut pour la discussion précédente que la moyenne des carrés des écarts, $S.B(\varepsilon - \mu)^2$, soit une quantité finie. Mais qui ne voit que Laplace a exclu toute fonction des erreurs qui n'offrirait pas une valeur finie de la moyenne des carrés de leurs écarts? Il n'avait pas besoin de le dire, puisque cette moyenne entre dans tous ses calculs, et sert de mesure à ce qu'il a nommé le *poids* des résultats. Sans nul doute, il aurait pu ajouter expressément cette exclusion de toute fonction de probabilité incapable de donner une moyenne finie des carrés des écarts. Il est probable qu'il ne l'a point fait, parce qu'il regardait comme évident que dans des observations, je ne dirai pas même précises, mais seulement conduites avec quelque connaissance des instruments, les erreurs sont finies, et, par cela même, toutes les fonctions de probabilités offrent une moyenne finie pour les carrés, et bien plus pour les puissances supérieures des écarts. Ces dernières moyennes sont inutiles, toutefois; elles n'entrent que dans un reste que Laplace néglige; et, dans le passage cité de M. Cauchy, on trou-

vera, si l'on n'est satisfait des motifs de Laplace, une autre face de la même analyse qui pourra contenter davantage ceux qui aimeront une évaluation analytique. Malheureusement, il ne sera pas plus praticable de déduire une évaluation numérique exacte des formules de M. Cauchy.

Au surplus, qu'on suppose un instant les erreurs sans limites, et, par suite, que la moyenne des carrés n'a point de valeur finie. Les observations mêmes en avertiront l'observateur le moins attentif. Car il faudra que les grandes valeurs des erreurs aient une probabilité notable; et dès lors elles se présenteront, sinon aussi souvent que les autres, du moins en proportion assez grande. Ainsi, l'on aura des observations effroyablement discordantes; et nul doute qu'elles ne soient rejetées, et que les instruments ou les procédés d'observations ne soient soumis à une correction très-fondée.

Qu'on prenne pour exemple la fonction de probabilité

$$f(\varepsilon) = \frac{k}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + k^2 \varepsilon^2},$$

indiquée par M. Cauchy, dans la séance du 8 août (p. 206 des *Comptes rendus*). On va reconnaître que l'instrument affecté d'une pareille loi de probabilité ne serait pas même mis en vente par un artiste ordinaire. On ne saurait quel nom donner à l'établissement qui l'aurait construit.

Pour simplifier, je suppose la constante $k = 1$, et l'on a, pour la probabilité d'une erreur numériquement inférieure à c,

$$2\int_0^c d\varepsilon f(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang} c.$$

De là on tire la petite Table que voici :

Probabilités.	Limite d'erreur.
0,1	0,15838
0,2	0,32492
0,3	0,50953
0,4	0,72654
0,5	1

Probabilités.	Limite d'erreur.
0,6	1,37 638
0,7	1,96 261
0,8	3,07 768
0,9	6,31 375
1	∞

On voit, quelque mesure qu'on veuille prendre pour unité d'erreur, qu'il sera tout aussi facile de trouver une erreur six fois plus grande, ou six fois plus petite, que d'en rencontrer une voisine de cette unité. Les grandes erreurs se montreraient donc très-vite. Un calcul simple fait voir qu'il y a 2 contre 1 à parier d'en trouver une sur dix observations, et plus de 7 contre 1 si l'on en exécute seulement vingt.

L'attention la plus ordinaire sera bientôt mise en garde contre un pareil instrument.

Mais il y a plus : ce serait un instrument fort singulier. Il y aurait tout autant de sécurité dans une seule observation que dans la moyenne de 10, de 20, de 1000 ou d'un nombre quelconque d'observations, ou plutôt il y aurait le même danger dans la moyenne de 1000 observations qu'avec une seule. Il est très-facile, en effet, de s'assurer que la loi de probabilité B de la moyenne μ de n observations est exactement la même,

$$f(\mu) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \mu^2},$$

quel que soit n, petit ou grand, que la loi d'une seule erreur. On posséderait alors un instrument avec lequel il n'y aurait qu'une seule observation à exécuter.

On avouera qu'un pareil exemple ne saurait être élevé contre la découverte de Laplace. Certes, le mot *fonction quelconque* ne peut comprendre que des fonctions capables de donner des résultats tant soit peu exacts, et d'autant plus exacts que l'observateur se donne la peine de multiplier ses opérations difficiles.

Aussi M. Poisson, qui a le premier fait remarquer la fonction *arc tang* ε, n'en a-t-il pas eu moins de confiance dans la méthode des

moindres carrés. Il se contente de dire qu'on ne rencontre sans doute pas cette hypothèse dans la pratique.

Outre l'exclusion des fonctions de probabilité qui n'ont pas de moyenne finie des carrés des erreurs, et qui seront décelées par les observations, il faut encore, pour que

$$\text{S.B}(\sigma - \dot{\mu}_\sigma)^2 = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots)\,\text{S.}b\,(\varepsilon - \dot{\mu})^2$$

devienne de plus en plus petite avec $\frac{1}{n}$, ou à mesure qu'on fait plus d'observations; il faut visiblement encore que les facteurs h_1, h_2, $h_3, \ldots$, ne forment pas une série décroissante à l'infini. C'est encore à M. Poisson qu'appartient la remarque de ce cas abstrait. Je n'ai publié qu'après lui un extrait de mon travail sur *l'effet de l'intérêt composé* (*Procès-verbaux de la Société Philomathique*, 1839, et journal *l'Institut*, n° 286), où j'ai montré que les facteurs qui multiplient les écarts croissent en progression géométrique, dans la pratique des établissements financiers et du commerce, de manière à exiger la multiplication des affaires dans un temps très-court. Mais on peut mettre en question si une pareille série de facteurs se rencontrera jamais parmi ceux qui se présentent pour résoudre un système d'équations, toutes capables de donner des valeurs des mêmes inconnues. Il n'existera, en effet, d'erreurs que sur les termes tout connus; et il faudrait admettre qu'il y a des équations dans lesquelles ces erreurs sont insignifiantes, pour qu'il y eût lieu de les multiplier par une suite de facteurs qui convergent rapidement. Cependant il est bien clair que, quand même ce cas arriverait à l'improviste, la discussion à laquelle tout observateur doit soumettre ses données l'avertirait sur-le-champ : de même que par l'examen des données financières, j'ai été averti de cette action dévorante de l'intérêt composé et des dépenses qui influent à la manière de l'intérêt composé.

Dans ce cas donc, il ne faudrait pas dire que la méthode fait défaut : car elle ne fera défaut, alors même, qu'à ceux qui l'appliqueront sans la bien connaître, et qui voudront qu'elle les dispense de tout examen. Il faut convenir que c'est là une chose impossible, et que la discussion des observations doit précéder de bien loin l'application de la méthode de Legendre et de Gauss, tant recommandée par Laplace, et par

Bessel, cet observateur consommé, à qui personne ne pourra objecter le défaut de pratique, défaut qui se fait plus d'une fois sentir, même chez Laplace et chez Poisson.

Je crois avoir fourni à l'appui de la découverte de Laplace des raisons qui ne peuvent guère laisser passage aux objections. Il y aurait à donner sur l'emploi de la méthode un grand nombre de détails dans lesquels il serait impossible d'entrer. Je renvoie donc à cet égard aux ouvrages originaux de Gauss et de Laplace.

DES VALEURS MOYENNES;

Par M. P.-L. DE TCHÉBYCHEF.

Traduction du russe, par M. N. de Khanikof.

Extrait du *Recueil des Sciences mathématiques*, t. II.

Si nous convenons d'appeler *espérance mathématique* d'une grandeur quelconque, la somme de toutes les valeurs qu'elle est susceptible de prendre, multipliées par leurs probabilités respectives, il nous sera aisé d'établir un théorème très-simple sur les limites entre lesquelles restera renfermée une somme de grandeurs quelconques.

Théorème. — *Si l'on désigne par* a, b, $c\ldots$, *les espérances mathématiques des quantités* x, y, $z\ldots$, *et par* a_1, b_1, $c_1,\ldots$ *les espérances mathématiques de leurs carrés* x^2, y^2, $z^2,\ldots$, *la probabilité que la somme* $x + y + z\ldots$ *est renfermée entre les limites*

$$a + b + c + \ldots + \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots},$$

et

$$a + b + c + \ldots - \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}$$

sera toujours plus grande que $1 - \frac{1}{\alpha^2}$, *quel que soit* α.

Démonstration. — Soient

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & x_3,\ldots, & x_l, \\ y_1, & y_2, & y_3,\ldots, & y_m, \\ z_1, & z_2, & z_3,\ldots, & z_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

toutes les valeurs imaginables des quantités x, y, z,..., et soient

$$\begin{array}{llll} p_1, & p_2, & p_3,\ldots, & p_l, \\ q_1, & q_2, & q_3,\ldots, & q_m, \\ r_1, & r_2, & r_3,\ldots, & r_n, \\ \ldots & & & \end{array}$$

les probabilités respectives de ces valeurs, ou bien les probabilités des hypothèses

$$\begin{array}{llll} x = x_1, & x_2, & x_3,\ldots, & x_l, \\ y = y_1, & y_2, & y_3,\ldots, & y_m, \\ z = z_1, & z_2, & z_3,\ldots, & z_n, \\ \ldots & & & \end{array}$$

Conformément à ces notations, les espérances mathématiques des grandeurs x, y, z,..., et de x^2, y^2, z^2,... s'exprimeront ainsi :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l, \\ b = q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \ldots + q_m y_m, \\ c = r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3 + \ldots + r_n z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_l x_l^2, \\ b_1 = q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 + \ldots + q_m y_m^2, \\ c_1 = r_1 z_1^2 + r_2 z_2^2 + r_3 z_3^2 + \ldots + r_n z_n^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, comme les hypothèses que nous venons de faire sur les quantités x, y, z,... sont les seules possibles, leurs probabilités satisferont aux équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l = 1, \\ q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_m = 1, \\ r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il nous sera facile de trouver, à l'aide des équations (1), (2) et (3), à quoi se réduit la somme de toutes les valeurs de l'expression

$$(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots,$$

si l'on y fait successivement

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad \nu + 1, 2, 3, \ldots, n \ldots.$$

En effet, cette expression étant développée nous donne

$$\begin{aligned}
&p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots y_\mu^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots z_\nu^2 + \ldots \\
&\quad + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda y_\mu + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda z_\nu + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots y_\mu z_\nu + \ldots \\
&\quad - 2(a + b + c + \ldots) p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda - 2(a + b + c + \ldots) p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots y_\mu \\
&\quad - 2(a + b + c + \ldots) p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots z_\nu - \ldots \\
&\quad + (a + b + c + \ldots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots.
\end{aligned}$$

En donnant, dans cette expression, à λ toutes les valeurs depuis $\lambda = 1$ jusqu'à $\lambda = l$, et en sommant les résultats de ces substitutions, nous obtenons la somme que voici :

$$\begin{aligned}
&q_\mu r_\nu \ldots (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_l x_l^2) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu^2 \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu^2 \\
&\quad + 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu \\
&\quad + 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu \\
&\quad + 2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu z_\nu \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad - 2(a + b + c + \ldots)(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \ldots \\
&\quad - 2(a + b + c + \ldots)(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu \\
&\quad - 2(a + b + c + \ldots)(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu - \ldots \\
&\quad + (a + b + c + \ldots)^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots.
\end{aligned}$$

Si, en vertu des équations (1), (2) et (3), nous mettons à la place

des sommes

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l,$$
$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_l x_l^2,$$

et

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l,$$

leurs valeurs a, a_1 et 1, nous obtiendrons la formule que voici :

$$\begin{aligned} &a_1 q_\mu r_\nu \ldots + q_\mu r_\nu \ldots y_\mu^2 + q_\mu r_\nu \ldots z_\nu^2 + \ldots \\ &\quad + 2a q_\mu r_\nu \ldots y_\mu + 2a q_\mu r_\nu \ldots z_\nu + 2 q_\mu r_\nu \ldots y_\mu z_\nu + \ldots \\ &\quad - 2(a + b + c \ldots) a q_\mu r_\nu \ldots - 2(a + b + c \ldots) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu - \ldots \\ &\quad + (a + b + c \ldots)^2 q_\mu r_\nu \ldots. \end{aligned}$$

Donnons dans cette formule à μ les valeurs

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots, m,$$

puis sommons les expressions qui résultent de ces substitutions, et remplaçons les sommes

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \ldots + q_m y_m,$$
$$q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 + \ldots + q_m y_m^2,$$
$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_m,$$

par leurs valeurs b, b_1 et 1 tirées des équations (1), (2) et (3), nous obtiendrons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &a_1 r_\nu \ldots + b_1 r_\nu \ldots + r_\nu \ldots z_\nu^2 + \ldots \\ &\quad + 2ab r_\nu \ldots + 2a r_\nu \ldots z_\nu + 2b r_\nu \ldots z_\nu + \ldots \\ &\quad - 2(a + b + c + \ldots) a r_\nu \ldots - 2(a + b + c + \ldots) b r_\nu \ldots \\ &\quad - 2(a + b + c + \ldots) r_\nu \ldots z_\nu - \ldots + (a + b + c \ldots)^2 r_\nu \ldots. \end{aligned}$$

En traitant de la même manière $\nu \ldots$, nous verrons que la somme de toutes les valeurs de l'expression

$$(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots,$$

qu'on obtient en faisant

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

sera égale à

$$\begin{aligned} &a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + 2ab + 2ac + 2bc + \ldots - 2(a + b + c \ldots)a \\ &\quad - 2(a + b + c \ldots)b - 2(a + b + c \ldots)c - \ldots + (a + b + c \ldots)^2. \end{aligned}$$

Cette expression étant développée se réduit à

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 \ldots.$$

D'où nous concluons que la somme des valeurs de l'expression

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)} p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots,$$

qu'on obtient en faisant

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

sera égale à $\frac{1}{\alpha^2}$. Or, il est évident qu'en rejetant de cette somme tous les membres dans lesquels le facteur

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)}$$

est inférieur à 1, et en le remplaçant par l'unité partout où il est plus grand que 1, nous diminuons cette somme, et elle sera moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$. Mais cette somme, ainsi réduite, ne sera formée que des produits $p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots$, qui correspondent aux valeurs de x_λ, y_μ, z_ν, ..., pour lesquels l'expression

$$(4) \qquad \frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)} > 1,$$

et elle représentera évidemment la probabilité que x, y, z... ont des valeurs qui satisfont à la condition (4).

Cette même probabilité peut être remplacée par la différence $1 - P$, si nous désignons par P la probabilité que les valeurs des x, y, z... ne satisfont pas à la condition (4), ou bien, ce qui est la même chose, que ces quantités ont des valeurs pour lesquelles le rapport

$$\frac{(x+y+z+\ldots-a-b-c-\ldots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots)}$$

n'est pas > 1; et par conséquent, que la somme $x+y+z\ldots$ reste comprise entre les limites

$$a+b+c+\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots}$$

et

$$a+b+c+\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots}.$$

D'où il est évident que la probabilité P devra satisfaire à l'inégalité

$$1 - P < \frac{1}{\alpha^2},$$

qui nous donne

$$P > 1 - \frac{1}{\alpha^2},$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Soit N le nombre de quantités x, y, z,...; si l'on pose dans le théorème qu'on vient de démontrer

$$\alpha = \frac{\sqrt{N}}{t},$$

et que l'on divise par N la somme $x+y+z+\ldots$ et ses limites

$$a+b+c+\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots},$$

et

$$a+b+c+\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots},$$

on obtient le théorème suivant concernant les valeurs moyennes.

Théorème. — *Si les espérances mathématiques des quantitées x, y, z,... et x^2, y^2, z^2,... sont respectivement a, b, c,..., a_1, b_1, c_1,..., la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique des* N *quantités x, y, z..., et la moyenne arithmétique des espérances mathématiques de ces quantités ne surpassera pas* $\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$ *sera toujours plus grande que* $1-\frac{t^2}{N}$ *quel que soit t.*

Comme les fractions $\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}$ et $\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}$ expriment les moyennes des quantités a_1, b_1, c_1,... et a_1^2, b_1^2, c_1^2..., toutes les fois que les espérances mathématiques a, b, c,..., a_1, b_1, c_1,... ne dépasseront pas une certaine limite finie, l'expression

$$\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$$

aura aussi une valeur finie, quelque grand que soit le nombre N, et par conséquent il dépend de nous de rendre la valeur de

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}},$$

aussi petite que l'on voudra, en attribuant à t une valeur suffisamment grande. Or, comme, quel que soit t, l'accroissement du nombre N jusqu'à l'infini rend nulle la fraction $\frac{t^2}{N}$, nous concluons, en vertu du théorème précédent :

Théorème. — *Si les espérances mathématiques des quantités U_1, U_2, U_3,... et de leurs carrés U_1^2, U_2^2, U_3^2,..., ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique d'un nombre* N *de ces quantités, et la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques, sera moindre qu'une quantité donnée, se réduit à l'unité, quand* N *devient infini.*

Dans l'hypothèse particulière que les quantités U_1, U_2, U_3,... se réduiront à l'unité ou à zéro, selon qu'un événement E a ou n'a pas lieu dans la 1re, 2e, 3e,..., Nième *épreuve*, nous remarquerons que la

somme $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N$ donnera le nombre de *répétition* de l'événement E en N épreuves, et la moyenne arithmétique

$$\frac{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N}{N}$$

représentera le rapport du nombre de *répétition* de l'événement E au nombre des *épreuves*. Pour appliquer à ce cas notre dernier théorème, désignons par $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$ les probabilités de l'événement E, dans la 1re, 2e, $3^e, \ldots$, $N^{ième}$ épreuve; les espérances mathématiques des quantités $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N$ et de leurs carrés

$$U_1^2,\quad U_2^2,\quad U_3^2\ldots,\quad U_N^2$$

s'exprimeront, d'après notre notation, par

$$\begin{aligned} &P_1 1 + (1 - P_1)0, \quad P_2 1 + (1 - P_2)0, \quad P_3 1 + (1 - P_3)0, \ldots, \\ &P_1 1^2 + (1 - P_1)0^2, \quad P_2 1^2 + (1 - P_2)0^2, \quad P_3 1^2 + (1 - P_3)0^2, \ldots. \end{aligned}$$

D'où l'on voit que ces espérances mathématiques sont $P_1, P_2, P_3, \ldots$, et que la moyenne arithmétique des N premières espérances est

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_N}{N},$$

c'est-à-dire la moyenne arithmétique des probabilités $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$.

Par suite de cela, et en vertu du théorème précédent, nous arrivons à la conclusion suivante :

Lorsque le nombre des épreuves devient infini, on obtient une probabilité, aussi rapprochée que l'on veut de l'unité, que la différence entre la moyenne arithmétique des probabilités de cet événement, pendant ces épreuves, et le rapport du nombre des répétitions de cet événement, au nombre total des épreuves, est moindre que toute quantité donnée.

Dans le cas particulier où la probabilité de l'événement reste la même pendant toutes les épreuves, nous avons le théorème de Bernoulli.

MÉMOIRE

SUR

LA RÉFLEXION ET LA RÉFRACTION CRISTALLINES;

PAR M. CHARLES **BRIOT**.

I.

1. Dans un Mémoire précédent (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XI, p. 305), j'ai exposé une méthode qui permet de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux milieux quelconques, et je l'ai appliquée au cas de deux milieux isotropes. Je me propose maintenant de l'appliquer au cas où le premier milieu est isotrope, le second biréfringent.

La méthode repose sur une extension du principe de continuité. Ce principe consiste en ce que, non-seulement les trois composantes du mouvement vibratoire, dans l'un et l'autre milieu, sont respectivement égales en chaque point de la surface de séparation, mais encore leurs dérivées premières par rapport à une coordonnée perpendiculaire à cette surface.

2. Prenons pour origine des coordonnées un point O de la surface de séparation que nous supposons plane, pour axe des x une perpendiculaire à ce plan dans le second milieu, pour axes des y et des z deux droites rectangulaires dans ce plan, la première étant située dans le plan d'incidence. Nous avons vu que l'onde incidente donne naissance dans le premier milieu, qui est isotrope, à deux ondes réfléchies, l'une transversale, l'autre longitudinale, de sorte que l'état vibratoire de ce milieu est représenté par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \mathrm{A}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{A}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + ae^{(-\mathrm{u}_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \eta = \mathrm{B}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{B}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + be^{(-\mathrm{u}_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \zeta = \mathrm{C}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{C}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \end{cases}$$

réduites à leurs parties réelles et auxquelles il faut joindre les relations

$$\mathrm{Au} + \mathrm{Bv} = 0, \quad -\mathrm{A}_1\mathrm{u} + \mathrm{Bv} = 0, \quad \frac{a}{-\mathrm{u}_1} + \frac{b}{\mathrm{v}}\cdot$$

3. Il est aisé de voir que l'onde incidente produit dans le second milieu, qui n'est plus isotrope, trois ondes refractées, deux transversales, une longitudinale. Reprenons en effet le raisonnement que nous avons fait pour établir le principe de continuité, ou de l'accord des vibrations à la surface de séparation. Le mouvement vibratoire dans l'un et l'autre milieu est représenté par une somme de mouvements simples, tels que

$$\xi = \mathrm{A}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\eta = \mathrm{B}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta = \mathrm{C}e^{ux+vy+wz-st},$$

caractérisés chacun par une exponentielle de la forme

$$e^{ux+vy+wz-st}.$$

L'accord des vibrations en chaque point de la surface de séparation exige que les trois constantes v, w, s aient les mêmes valeurs, $v = \mathrm{v}i$, $w = 0$, $s = \mathrm{s}i$, celles qui se rapportent à l'onde incidente, dans toutes les exponentielles qui ne différeront ainsi que par la constante u. On peut donc représenter le mouvement vibratoire dans chaque milieu par les formules

$$\xi = \xi_1 e^{vy+wz-st}, \quad \eta = \eta_1 e^{vy+wz-st}, \quad \zeta = \zeta_1 e^{vy+wz-st},$$

dans lesquelles ξ_1, η_1, ζ_1 sont des fonctions de la seule variable x.

Quand on néglige la dispersion, les équations différentielles du mouvement vibratoire sont des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du second ordre des trois fonctions ξ, η, ζ des quatre variables indépendantes x, y, z, t. Dans la question proposée, ces équations se réduisent à six équations homogènes du premier ordre de la

forme

$$\frac{d\xi_1}{dx} = \xi'_1, \quad \frac{d\eta_1}{dx} = \eta'_1, \quad \frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta'_1,$$

$$\frac{d\xi'_1}{dx} = \mathcal{L}\xi_1 + \mathfrak{M}\eta_1 + \mathfrak{N}\zeta_1 + \mathfrak{P}\xi'_1 + \mathfrak{Q}\eta'_1 + \mathfrak{R}\zeta'_1,$$

$$\frac{d\eta'_1}{dx} = \mathcal{L}'\xi_1 + \mathfrak{M}'\eta_1 + \mathfrak{N}'\zeta_1 + \mathfrak{P}'\xi'_1 + \mathfrak{Q}'\eta'_1 + \mathfrak{R}'\zeta'_1,$$

$$\frac{d\zeta'_1}{dx} = \mathcal{L}''\xi_1 + \mathfrak{M}''\eta_1 + \mathfrak{N}''\zeta_1 + \mathfrak{P}''\xi'_1 + \mathfrak{Q}''\eta'_1 + \mathfrak{R}''\zeta'_1.$$

Les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$,... sont des constantes dans l'un et l'autre milieu; mais ils changent rapidement, tout en conservant des valeurs finies, quand on passe d'un milieu à l'autre. Il en résulte d'abord, comme nous l'avons dit, que les quantités ξ'_1, η'_1, ζ'_1 n'éprouvent que des variations très-petites, quand x varie de $-x'$ à $+x'$, x' étant une quantité très-petite, et à plus forte raison les quantités ξ_1, η_1, ζ_1. C'est en cela que consiste l'accord des vibrations à la surface de séparation des deux milieux, avec l'extension que nous lui avons donnée.

Pour intégrer chacun de ces systèmes d'équations différentielles, on posera

$$\xi_1 = \mathrm{A}e^{ux}, \quad \eta_1 = \mathrm{B}e^{ux}. \quad \zeta_1 = \mathrm{C}e^{ux},$$

$$\xi'_1 = u\mathrm{A}e^{ux}, \quad \eta'_1 = u\mathrm{B}e^{ux}, \quad \zeta'_1 = u\mathrm{C}e^{ux};$$

la constante u sera assujettie à vérifier une équation du sixième degré; les racines de cette équation fourniront six intégrales simples, dont la somme constituera l'intégrale générale.

4. Lorsque le milieu est isotrope, l'équation du sixième degré en u se réduit à une équation du troisième degré en u^2 ayant une racine double et une racine simple; pour préciser le raisonnement, nous supposerons ces deux racines négatives; à la racine double correspond une vibration transversale, à la racine simple une vibration longitudinale (Ier Mémoire, 7). Un milieu homoédrique quelconque différant peu d'un certain milieu isotrope, qui représente en quelque sorte sa constitution moyenne, l'équation du sixième degré en u admettra deux racines peu différentes, de la forme $u'i$, $u''i$, u' et u'' étant des quantités

positives, deux autres aussi peu différentes de la forme $-u'''i$, $-u^{\text{IV}}i$, les deux quantités positives u''' et u^{IV} différant peu de u' et u'', et enfin deux racines telles que $u'_1 i$ et $-u''_1 i$, les deux quantités positives u'_1 et u''_1 différant peu l'une de l'autre. Aux quatre premières racines correspondent des vibrations transversales ou quasi-transversales rectilignes, aux deux autres des vibrations quasi-longitudinales. La coordonnée x étant positive dans le second milieu, on ne prendra que les trois racines $u'i$, $u''i$, $u'_1 i$ qui fournissent des ondes planes s'éloignant du plan de séparation. Ainsi l'onde incidente peut donner naissance dans le second milieu à trois ondes réfractées, deux transversales ou quasi-transversales, et une quasi-logitudinale, de sorte que l'état vibratoire de ce milieu sera représenté par les formules

$$(2)\quad \begin{cases} \xi = A' e^{(u'x+vy-st)i} + A'' e^{(u''x+vy-st)i} + a' e^{(u'_1x+vy-st)i}, \\ \eta = B' e^{(u'x+vy-st)i} + B'' e^{(u''x+vy-st)i} + b' e^{(u'_1x+vy-st)i}, \\ \zeta = C' e^{(u'x+vy-st)i} + C'' e^{(u''x+vy-st)i} + c' e^{(u'_1x+vy-st)i}, \end{cases}$$

réduites aussi à leurs parties réelles.

5. En écrivant que les valeurs de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx}$, dans l'un et l'autre milieu, sont respectivement égales pour $x = 0$, on a les six équations linéaires

$$(3)\quad \begin{cases} A + A_1 + a = A' + A'' + a', \\ B + B_1 + b = B' + B'' + b', \\ C + C_1 \qquad = C' + C'' + c'. \\ Au - A_1 u - a u_1 = A'u' + A''u'' + a'u'_1, \\ Bu - B_1 u - b u_1 = B'u' + B''u'' + b'u'_1, \\ Cu - C_1 u \qquad = C'u' + C''u'' + c'u'_1. \end{cases}$$

Si l'on appelle α l'angle d'incidence, α' et α'' les angles de réfractions, et de même α_1 et α'_1 les angles aigus que font avec Ox les normales aux deux ondes longitudinales, l'une réfléchie, l'autre réfractée, on a

$$\frac{u}{v} = \cot\alpha, \quad \frac{u'}{v} = \cot\alpha', \quad \frac{u''}{v} = \cot\alpha'', \quad \frac{u_1}{v} = \cot\alpha_1, \quad \frac{u'_1}{v} = \cot\alpha'_1.$$

Soient $O\varphi$, $O\varphi_1$, $O\varphi'$, $O\varphi''$, $O\varphi'_1$ les traces sur le plan d'incidence de l'onde incidente, de l'onde transversale réfléchie et des trois ondes réfractées, ces droites faisant toutes avec Oy des angles aigus. On pourra représenter la vibration incidente par ses projections sur les deux axes rectangulaires Oz, $O\varphi$ situés dans son plan

$$\zeta = Ce^{(ux+vy-st)i}, \quad \varphi = De^{(ux+vy-st)i},$$

d'où

$$A = -D\sin\alpha, \quad B = D\cos\alpha;$$

de même, la vibration transversale réfléchie par ses projections sur les deux axes rectangulaires Oz, $O\varphi_1$ situés dans son plan

$$\zeta = C_1 e^{(-ux+vy-st)i}, \quad \varphi_1 = D_1 e^{(-ux+vy-st)i},$$

d'où

$$A_1 = D_1 \sin\alpha, \quad B_1 = D_1\cos\alpha.$$

Quant à la vibration longitudinale réfléchie, si on appelle e son amplitude, on a

$$a = -e\cos\alpha_1, \quad b = e\sin\alpha_1.$$

Les équations (3) deviennent ainsi, disposées dans un autre ordre,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & C + C_1 = C' + C'' + c', \\ & (C - C_1)\cot\alpha = C'\cot\alpha' + C''\cot\alpha'' + c'\cot\alpha'_1, \\ & (D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 = B' + B'' + b', \\ & -(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} = A'\cot\alpha' + A''\cot\alpha'' + a'_1\cot\alpha'_1, \\ & -(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 = A' + A'' + a', \\ & (D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 = B'\cot\alpha' + B''\cot\alpha'' + b'\cot\alpha'_1. \end{aligned}\right.$$

6. Ce sont six équations du premier degré à six inconnues. On donne la vibration incidente, c'est-à-dire C et D; la vibration transversale réfléchie contient deux inconnues C_1 et D_1, la vibration longitudinale réfléchie une seule inconnue e; les trois vibrations réfractées étant

rectilignes et s'effectuant suivant les directions déterminées, chacune d'elles ne renferme qu'une seule inconnue, son amplitude; en tout six inconnues. Nous avons supposé à la vérité que toutes les valeurs de u relatives au second milieu sont de la forme ui, ce qui donne trois ondes planes qui se propagent sans s'affaiblir en s'éloignant de la surface de séparation. Si, dans le milieu isotrope fictif dont le second milieu diffère très-peu, une racine de l'équation en u^2, par exemple la racine simple, est positive, l'équation du sixième degré en u aura une racine réelle positive et une racine réelle négative, peu différente de la première en valeur absolue; à la racine négative correspond une vibration dont l'amplitude diminue rapidement, à mesure qu'on s'éloigne du plan de séparation, et qui par conséquent reste concentrée dans le voisinage de ce plan (1er Mémoire, **8**); il suffira de remplacer dans les équations précédentes, et par suite dans les formules que nous en déduirons, u'_1 par $U'_1 i$, ou $\cot\alpha'_1$ par $i\frac{U'_1}{V}$.

II.

7. Il semble résulter de la théorie mathématique de la propagation de la lumière dans les milieux homoédriques quelconques, et c'est une remarque qui a été faite par Cauchy il y a longtemps, que la vibration ne peut être située rigoureusement dans le plan de l'onde, que si la vitesse de propagation est la même dans toutes les directions, ce qui n'a lieu que dans les milieux isotropes, et dans les cristaux à un axe optique pour la vibration ordinaire. Dans tous les autres cas, les deux vibrations transversales font des angles petits avec le plan de l'onde, et la vibration longitudinale un petit angle avec la normale au plan de l'onde. Nous effectuerons d'abord le calcul, en négligeant cette déviation des vibrations dans le second milieu, c'est-à-dire en supposant que chacune des deux vibrations transversales est située rigoureusement dans le plan de l'onde, et la vibration longitudinale rigoureusement perpendiculaire au plan de l'onde.

Appelons θ' et θ'' les angles que font avec Oz les droites suivant lesquelles s'effectuent les deux vibrations transversales refractées, angles comptés de Oz vers $O\varphi'$, ou de Oz vers $O\varphi''$, E' et E'' les amplitudes de

ces vibrations. Ces vibrations seront représentées par les formules

$$\zeta = \mathrm{E}' \cos\theta' e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \quad \varphi' = \mathrm{E}' \sin\theta' e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i},$$
$$\zeta = \mathrm{E}'' \cos\theta'' e^{(\mathrm{u}''x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \quad \varphi'' = \mathrm{E}'' \sin\theta'' e^{(\mathrm{u}''x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i},$$

et l'on aura

$$\mathrm{C}' = \mathrm{E}'\cos\theta', \quad \mathrm{A}' = -\mathrm{E}'\sin\theta'\sin\alpha', \quad \mathrm{B}' = \mathrm{E}'\sin\theta'\cos\alpha',$$
$$\mathrm{C}'' = \mathrm{E}''\cos\theta'', \quad \mathrm{A}'' = -\mathrm{E}''\sin\theta''\sin\alpha'', \quad \mathrm{B}'' = \mathrm{E}''\sin\theta''\cos\alpha''.$$

Quant à la vibration longitudinale, si l'on appelle e' son amplitude, on aura

$$a' = \mathrm{e}'\cos\alpha'_1, \quad b' = \mathrm{e}'\sin\alpha'_1, \quad c' = 0.$$

Les équations (4) deviennent

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{C} + \mathrm{C}_1 = \mathrm{E}'\cos\theta' + \mathrm{E}''\cos\theta'',\\
&(\mathrm{C} - \mathrm{C}_1)\cot\alpha = \mathrm{E}'\cos\theta'\cot\alpha' + \mathrm{E}''\cos\theta''\cot\alpha'',\\
&(\mathrm{D} + \mathrm{D}_1)\cos\alpha + \mathrm{e}\sin\alpha_1\\
&\qquad = \mathrm{E}'\sin\theta'\cos\alpha' + \mathrm{E}''\sin\theta''\cos\alpha'' + \mathrm{e}'\sin\alpha'_1,\\
&-(\mathrm{D} + \mathrm{D}_1)\cos\alpha + \mathrm{e}\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1}\\
&\qquad = -\mathrm{E}'\sin\theta'\cos\alpha' - \mathrm{E}''\sin\theta''\cos\alpha'' + \mathrm{e}'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1},\\
&-(\mathrm{D} - \mathrm{D}_1)\sin\alpha - \mathrm{e}\cos\alpha_1\\
&\qquad = -\mathrm{E}'\sin\theta'\sin\alpha' - \mathrm{E}''\sin\theta''\sin\alpha'' + \mathrm{e}'\cos\alpha'_1,\\
&(\mathrm{D} - \mathrm{D}_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \mathrm{e}\cos\alpha_1\\
&\qquad = \mathrm{E}'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} + \mathrm{E}''\sin\theta''\frac{\cos^2\alpha''}{\sin\alpha''} + \mathrm{e}'\cos\alpha'_1.
\end{aligned}\right.$$

On a ainsi six équations linéaires entre les huit quantités C, D, C_1, D_1, e, E', E'', e'. Deux de ces quantités peuvent être prises arbitrairement, les six autres sont des fonctions de ces deux-là.

8. Pour résoudre facilement ces équations, nous ferons usage d'un procédé ingénieux qui a été employé par Mac-Cullagh dans son remarquable travail sur la réflexion et la réfraction cristallines (*Journal de*

Mathématiques, 1842). Nous chercherons d'abord quelle doit être la vibration incidente pour qu'il ne se produise dans le second milieu qu'une seule vibration réfractée; il faut faire $E'' = 0$, la quantité E' restant arbitraire. Les équations (5) se réduisent à

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
& C + C_1 = E'\cos\theta', \\
& (C - C_1)\cot\alpha = E'\cos\theta'\cot\alpha', \\
& (D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 = E'\sin\theta'\cos\alpha' + e'\sin\alpha'_1, \\
& -(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} = -E'\sin\theta'\cos\alpha' + e'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}, \\
& -(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 = -E'\sin\theta'\sin\alpha' + e'\cos\alpha'_1, \\
& (D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 = E'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} + e'\cos\alpha'_1.
\end{aligned}\right.$$

Mais ces équations sont précisément celles qui se rapportent au cas de deux milieux isotropes et que nous avons résolues dans notre premier Mémoire. En appliquant immédiatement les formules que nous avons trouvées (**12**), et posant $\varpi = \alpha_1 - \alpha'_1$, on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
& C = E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha' + \alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}, \\
& D = E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha' + \alpha)\cos(\alpha' - \alpha + \varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}, \\
& C_1 = E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}, \\
& D_1 = E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha' - \alpha)\cos(\alpha' + \alpha + \varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}, \\
& e = E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha' + \alpha)\sin(\alpha' - \alpha)\sin\alpha_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos\varpi}, \\
& e' = E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha' + \alpha)\sin(\alpha' - \alpha)\sin\alpha'_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

9. En faisant $E' = 0$ et laissant E'' arbitraire, on obtient des formules analogues; il suffit de remplacer dans les seconds membres E' par E'', et α' par α''. On a ainsi deux solutions particulières des équations (5), renfermant chacune une constante arbitraire; ces équations étant linéaires, la somme sera aussi une solution, et comme elle ren-

ferme deux constantes arbitraires E′ et E″, ce sera la solution générale :

$$
(8)\quad\left\{
\begin{aligned}
C &= E'\cos\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E''\cos\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)}{2\sin\alpha''\cos\alpha},\\
D &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\cos(\alpha'-\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)\cos(\alpha''-\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha''\cos\alpha\cos\varpi},\\
C_1 &= E'\cos\theta'\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E'\cos\theta''\,\frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{2\sin\alpha''\cos\alpha},\\
D_1 &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha'+\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''-\alpha)\cos(\alpha''+\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha''\cos\alpha\cos\varpi},\\
e &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin\alpha_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)\sin(\alpha''-\alpha)\sin\alpha_1}{\sin\alpha''\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi},\\
e' &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin\alpha'_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)\sin(\alpha''-\alpha)\sin\alpha'_1}{\sin\alpha''\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans la pratique, les données sont, non pas E′ et E″, mais les deux composantes C et D de la vibration incidente. Si l'on pose

$$\Delta = \sin\theta''\cos\theta'\cos(\alpha''-\alpha+\varpi) - \sin\theta'\cos\theta''\cos(\alpha'-\alpha+\varpi);$$

des deuxpremières équations on tire les amplitudes des deux vibrations transversales réfractées,

$$
(9)\quad\left\{
\begin{aligned}
E' &= \frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\Delta\sin(\alpha'+\alpha)}\left[C\sin\theta''\cos(\alpha''-\alpha+\varpi) - D\cos\theta''\cos\varpi\right],\\
E'' &= -\frac{2\sin\alpha''\cos\alpha}{\Delta\sin(\alpha''+\alpha)}\left[C\sin\theta'\cos(\alpha'-\alpha+\varpi) - D\cos\theta'\cos\varpi\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Portant ces valeurs dans les équations suivantes, on a les deux composantes C_1 et D_1 de la vibration transversale réfléchie, et les amplitudes e et e′ des vibrations longitudinales.

10. Quand les deux milieux sont isotropes, l'angle ϖ paraît avoir une valeur imaginaire très-petite, au moins lorsque l'angle d'incidence α est supérieur à une certaine limite; c'est là ce qui produit la polarisation elliptique du rayon réfléchi, telle qu'elle a été observée par M. Jamin. Il est probable qu'il en est de même lorsque le second milieu est cristallisé.

Il en résulte plusieurs conséquences remarquables. Supposons la vibration incidente rectiligne, $C = E\cos\theta$, $D = E\sin\theta$; les valeurs de E' et de E'' renfermant l'angle imaginaire ϖ, les deux vibrations transversales réfractées, quoique rectilignes, auront entre elles une petite différence de phase, à l'entrée même du cristal. Il en sera de même des deux composantes C_1 et D_1 de la vibration transversale réfléchie, qui sera elliptique.

Considérons maintenant les formules (7), qui se rapportent à la réfraction uniradiale, c'est-à-dire au cas où une seule vibration transversale réfractée se produit dans le second milieu. Si l'angle ϖ est imaginaire, pour que ce phénomène ait lieu, les composantes C et D ayant entre elles une petite différence de phase, il est nécessaire que la vibration incidente soit elliptique. Posons $\tang\varpi = -\varepsilon i$ (Ier Mémoire, **15**); les formules (7) deviennent

$$(10)\quad \begin{cases} \begin{cases} C = E'\cos\theta' \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}, \\ D = E'\sin\theta' \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}\left[\cos(\alpha'-\alpha) + i\varepsilon\sin(\alpha'-\alpha)\right]. \end{cases} \\ \begin{cases} C_1 = E'\cos\theta' \dfrac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}, \\ D_1 = E'\sin\theta' \dfrac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}\left[\cos(\alpha'+\alpha) + i\varepsilon\sin(\alpha'+\alpha)\right]. \end{cases} \end{cases}$$

Dans l'expression de D, la partie imaginaire étant toujours très-petite par rapport à la partie réelle, la vibration incidente sera presque rectiligne; l'ellipticité sera peu accusée. Mais, dans la vibration réfléchie, lorsque l'angle $\alpha' + \alpha$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, la différence de phase des deux composantes C_1 et D_1 devient égale à $\frac{\pi}{2}$; si en outre l'azimut θ' de la vibration réfractée est voisine de $\frac{\pi}{2}$, le rapport des axes peut acquérir

une valeur sensible. C'est dans ces conditions que s'est placé M. Jamin pour observer la polarisation elliptique à la surface des milieux transparents isotropes; il est probable qu'on l'observera de la même manière à la surface des cristaux.

11. En général, dans le cas de la réfraction uniradiale, la vibration incidente et la vibration réfléchie sont sensiblement rectilignes, et les angles θ et θ_1 qu'elles font avec l'axe Oz sont donnés par les formules approchées

$$(11) \qquad \begin{cases} \tang\theta = \tang\theta'\cos(\alpha'-\alpha), \\ \tang\theta_1 = \tang\theta'\cos(\alpha'+\alpha), \end{cases}$$

que l'on déduit des équations (7), en y faisant $\varpi = 0$. A ce degré d'approximation, si la vibration incidente est rectiligne et dans la direction θ, elle donnera naissance à une seule vibration réfractée et à une vibration réfléchie aussi rectiligne et dans la direction θ_1. On déterminera les amplitudes de ces deux vibrations par les formules

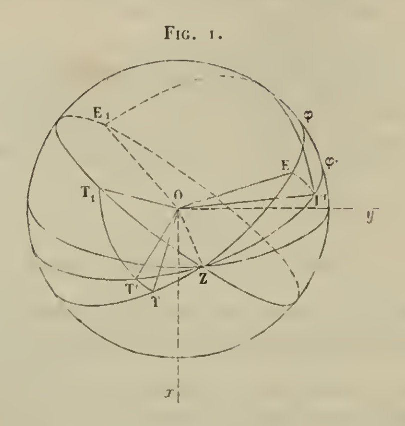
$$(12) \qquad \begin{cases} E'\cos\theta' = E\cos\theta\,\dfrac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha'+\alpha)}, \\ E_1\cos\theta_1 = E\cos\theta\,\dfrac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\sin(\alpha'+\alpha)}, \end{cases}$$

que l'on déduit aussi des équations (7).

La considération des transversales a permis à Mac-Cullagh de comprendre dans une même loi géométrique l'ensemble des formules (11) et (12), relatives à la direction et à l'amplitude des vibrations. Mac-Cullagh appelle transversale d'une vibration rectiligne, une droite située dans le plan de l'onde, et perpendiculaire à la direction de la vibration; pour préciser cette définition, on se supposera placé sur la normale à l'onde, les pieds sur le plan, la tête du côté vers lequel se propage l'onde, et on portera un angle droit à partir de la vibration dans un sens convenu, par exemple de droite à gauche. Dans la figure ci-contre qui se rapporte au cas où $\omega > \omega'$, et par suite $\alpha > \alpha'$, les vibrations incidente, réfléchie ou réfractée sont OE, OE_1, OE'; leurs transversales sont OT, OT_1, OT'. Les formules (11) signifient que les deux triangles sphériques ZT'T, $ZT'T_1$ sont rectangles en T', et par conséquent que les trois transversales OT, OT', OT_1 sont situées dans un même plan

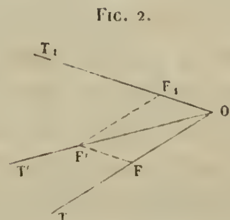
perpendiculaire à l'onde réfractée. On peut énoncer autrement cette première partie du théorème, en disant que les droites OE, OE_1 suivant lesquelles s'effectuent les vibrations incidente et réfléchie sont les

Fig. 1.



projections de la vibration réfractée OE' sur l'onde incidente et sur l'onde réfléchie. Portons maintenant sur les transversales OT et OT_1 des longueurs OF et OF_1 égales à E et E_1, la diagonale du parallélogramme construit sur ces longueurs OF et OF_1, coïncidera avec la transversale OT' de la vibration réfractée, et l'amplitude E' de cette vibration sera égale à la longueur OF' de cette diagonale multipliée par $\frac{\omega'}{\omega}$. Cette construction remarquable équivaut aux formules (11) et (12) qui ne sont autres que les formules de Fresnel, relatives aux milieux isotropes.

Fig. 2.



Pour la seconde réfraction uniradiale, celle qui correspond à l'hypothèse $E' = 0$, on a des formules analogues; il suffit de remplacer θ' par θ'', α' par α'' et E' par E''.

Maintenant, si l'on donne une vibration incidente quelconque,

rectiligne ou elliptique, au lieu d'appliquer les formules (9) et (8), on pourra la décomposer en deux vibrations rectilignes suivant les deux directions θ; chacune d'elles produira une vibration transversale réfractée et une vibration transversale réfléchie que l'on calculera d'après les formules (11) et (12), ou que l'on déterminera d'après la construction géométrique de Mac-Cullagh. La résultante des deux vibrations réfléchies sera la vibration réfléchie cherchée.

Si l'angle d'incidence α est tel, que les deux valeurs de θ_1 soient égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$(13) \qquad \tang\theta' \cos(\alpha' + \alpha) = \tang\theta'' \cos(\alpha'' + \alpha),$$

les deux vibrations réfléchies s'effectuant suivant la même droite, la vibration résultante sera aussi rectiligne, et dans la même direction θ_1, quelle que soit la vibration incidente, rectiligne ou elliptique. Cette valeur de α est ce qu'on appelle l'angle de polarisation, et c'est par cette considération que Mac-Cullagh l'a déterminé. Mais il est probable qu'il n'existe pas rigoureusement d'angle de polarisation, et que la vibration réfléchie est elliptique; car les valeurs de $\alpha + \alpha'$ et de $\alpha + \alpha''$ qui vérifient l'équation (13) sont voisines de $\frac{\pi}{2}$, et l'on se trouve alors dans les conditions de la polarisation elliptique. C'est pourquoi nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

III.

12. Nous avons négligé jusqu'à présent la déviation des vibrations dans le second milieu, c'est-à-dire que nous avons admis que les deux vibrations transversales sont rigoureusement situées dans les plans d'onde et la vibration longitudinale rigoureusement perpendiculaire. Mais il est probable que ceci n'est qu'une première approximation; nous allons supposer maintenant que les vibrations sont quasi transversales ou quasi longitudinales, comme l'indique la théorie. Nous appellerons τ' et τ'' les angles très-petits que font les directions des deux premières vibrations avec les plans d'onde, et τ'_1 l'angle très-petit que fait la troisième avec la perpendiculaire au plan de l'onde. Nous désignerons d'ailleurs par θ', θ'', θ'_1 les azimuts de ces vibrations, c'est-à-dire les angles que font avec Oz leurs projections sur les plans d'onde.

On a, pour une vibration quasi transversale,

$$\begin{aligned}
A' &= E'(-\cos\tau'\sin\theta'\sin\alpha' + \sin\tau'\cos\alpha'),\\
B' &= E'(\cos\tau'\sin\theta'\cos\alpha' + \sin\tau'\sin\alpha'),\\
C' &= E'\cos\tau'\cos\theta',
\end{aligned}$$

et, en négligeant le carré de la déviation τ',

$$\begin{aligned}
A' &= E'(-\sin\theta'\sin\alpha' + \sin\tau'\cos\alpha'),\\
B' &= E'(\sin\theta'\cos\alpha' + \sin\tau'\sin\alpha'),\\
C' &= E'\cos\theta'.
\end{aligned}$$

On aura de même, pour une vibration quasi longitudinale,

$$\begin{aligned}
a' &= e'(-\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1 + \cos\tau'_1\cos\alpha'_1),\\
b' &= e'(\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1 + \cos\tau'_1\sin\alpha'_1),\\
c' &= e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,
\end{aligned}$$

et, en négligeant le carré de τ'_1,

$$\begin{aligned}
a' &= e'(\cos\alpha'_1 - \sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1),\\
b' &= e'(\sin\alpha'_1 + \sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1),\\
c' &= e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1.
\end{aligned}$$

Les équations de condition relatives à la surface de séparation des deux milieux deviennent ainsi

$$(14)\left\{\begin{aligned}
&C + C_1 - E'\cos\theta' - E''\cos\theta'' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,\\
&(C - C_1)\cot\alpha - E'\cos\theta'\cot\alpha' - E''\cos\theta''\cot\alpha'' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\cot\alpha'_1,\\
&(D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 - E'\sin\theta'\cos\alpha' - E''\sin\theta''\cos\alpha'' - e'\sin\alpha'_1\\
&\quad = E'\sin\tau'\sin\alpha' + E''\sin\tau''\sin\alpha'' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} + E'\sin\theta'\cos\alpha' + E''\sin\theta''\cos\alpha'' - e'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}\\
&\quad = E'\sin\tau'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} + E''\sin\tau''\frac{\cos^2\alpha''}{\sin\alpha''} - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 + E'\sin\theta'\sin\alpha' + E''\sin\theta''\sin\alpha''' - e'\cos\alpha'_1\\
&\quad = E'\sin\tau'\cos\alpha' + E''\sin\tau''\cos\alpha'' - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1,\\
&(D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 - E'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - E''\sin\theta''\frac{\cos^2\alpha''}{\sin\alpha''} - e'\cos\alpha'_1\\
&\quad = E'\sin\tau'\cos\alpha' + E''\sin\tau''\cos\alpha'' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}.
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres ont des valeurs très-petites ; les équations que l'on obtient en égalant les premiers membres à zéro sont précisément les équations (5) que nous avons trouvées en négligeant la déviation.

13. Dans le cas de la réfraction uniradiale, si l'on fait $E'' = 0$, les équations précédentes se réduisent à

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&C + C_1 - E'\cos\theta' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,\\
&(C - C_1)\cot\alpha - E'\cos\theta'\cot\alpha' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\cot\alpha'_1,\\
&(D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 - E'\sin\theta'\cos\alpha' - e'\sin\alpha'_1\\
&\quad = E'\sin\tau'\sin\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} + E'\sin\theta'\cos\alpha' - e\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}\\
&\quad = E'\sin\tau'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 + E'\sin\theta'\sin\alpha' - e'\cos\alpha'_1\\
&\quad = E'\sin\tau'\cos\alpha' - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1,\\
&(D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 - E'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - e'\cos\alpha'_1\\
&\quad = E'\sin\tau'\cos\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations E' est regardée comme une quantité donnée, les inconnues sont C, C_1, D, D_1, e, e'. Au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, c'est-à-dire en négligeant le carré de la déviation, on peut dans les seconds membres remplacer e' par sa valeur approchée (7) tirée des équations (6). Appelons C, C_1, D, D_1, e, e' les valeurs des inconnues qui vérifient les équations (6), $C + \delta C$, $C_1 + \delta C_1$, $D + \delta D$, $D_1 + \delta D_1$, $e + \delta e$, $e' + \delta e'$ celles qui vérifient les équations (15); nous aurons à résoudre les équations

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta C + \delta C_1 = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,\\
&(\delta C - \delta C_1)\cot\alpha = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\cot\alpha'_1,\\
&(\delta D + \delta D_1)\cos\alpha + \delta e\sin\alpha_1 - \delta e'\sin\alpha'_1 = E'\sin\tau'\sin\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(\delta D + \delta D_1)\cos\alpha + \delta e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} - \delta e'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1} = E'\sin\tau'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(\delta D - \delta D_1)\sin\alpha - \delta e\cos\alpha_1 - \delta e'\cos\alpha'_1 = E'\sin\tau'\cos\alpha' - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1,\\
&(\delta D - \delta D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \delta e\cos\alpha_1 - \delta e'\cos\alpha'_1 = E'\sin\tau'\cos\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}.
\end{aligned}\right.$$

Des deux premières, on déduit

$$(17)\quad \begin{cases} \delta C = e' \sin\tau'_1 \cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'_1 + \alpha)}{2\sin\alpha'_1 \cos\alpha}, \\ \delta C' = e' \sin\tau'_1 \cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'_1 - \alpha)}{2\sin\alpha'_1 \cos\alpha}. \end{cases}$$

De la troisième et de la quatrième, ajoutées membre à membre, on tire

$$\frac{\delta e}{\sin\alpha_1} - \frac{\delta e'}{\sin\alpha'_1} = \frac{E'\sin\tau'}{\sin\alpha'},$$

d'où

$$\delta e = \delta e' \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha'_1} + E'\sin\tau' \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha'}.$$

Portant cette valeur de δe dans la troisième et la cinquième équation, on a les deux équations

$$(\delta D + \delta D_1)\cos\alpha + \delta e' \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\sin\varpi}{\sin\alpha'_1}$$
$$= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha' - \alpha_1)\sin(\alpha' + \alpha_1)}{\sin\alpha'} + e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \cos\alpha'_1,$$

$$-(\delta D - \delta D_1)\sin\alpha - \delta e' \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos\varpi}{\sin\alpha'_1}$$
$$= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha' + \alpha_1)\cos(\alpha' - \alpha_1)}{\sin\alpha'} - e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \sin\alpha'_1.$$

L'élimination de $\delta e'$ donne l'équation

$$\delta D\cos(\alpha + \varpi) + \delta D_1 \cos(\alpha - \varpi)$$
$$= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha' + \alpha_1)\sin(\alpha' - \alpha'_1)}{\sin\alpha'} + e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \cos\alpha_1.$$

D'autre part, de la cinquième et de la sixième des équations (16), retranchées membre à membre, on déduit

$$\delta D - \delta D_1 = e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'_1}.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$(18)\quad \begin{cases} \delta D = E'\sin\tau' \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi} \\ \qquad + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \dfrac{\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'_1\cos\varpi}, \\ \delta D_1 = E'\sin\tau' \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi} \\ \qquad + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \dfrac{\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'_1\cos\varpi}. \end{cases}$$

En remplaçant dans les équations (17) et (18) e' par sa valeur approchée donnée par la dernière des équations (7), on a enfin

$$(19)\quad \begin{cases} \delta C = E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}, \\ \delta C_1 = E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}, \\ \delta D = E'\sin\tau' \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi} \\ \qquad + E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi}, \\ \delta D_1 = E'\sin\tau' \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi} \\ \qquad + E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi}. \end{cases}$$

On ajoutera ces quantités petites aux valeurs approchées données par les formules (7).

Comme les angles α_1 et α'_1, réels ou imaginaires, paraissent être peu différents l'un de l'autre, on pourra sans inconvénient faire $\alpha'_1 = \alpha_1$ dans les formules précédentes, ce qui les réduit à

$$(20)\quad \begin{cases} \delta C = E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin 2\alpha_1}, \\ \delta C_1 = E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin 2\alpha_1}, \end{cases}$$

$$(21)\left\{\begin{aligned}
\delta D &= E'\sin\tau'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'}\\
&\quad+E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin 2\alpha_1}.\\
\delta D_1 &= E'\sin\tau'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'}\\
&\quad+E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin 2\alpha_1},
\end{aligned}\right.$$

14. Nous avons ici en quelque sorte trois causes de perturbations : 1° celle qui provient de l'angle ϖ, ou de la différence des vitesses de propagation des vibrations longitudinales dans les deux milieux; 2° la déviation τ' de la vibration transversale dans le second milieu; 3° la déviation τ'_1 de la vibration longitudinale dans ce même milieu. Nous avons déjà étudié l'influence de la première cause (n° **10**); elle produit la polarisation elliptique.

Pour reconnaître l'influence de la seconde cause, nous négligerons les deux autres, c'est-à-dire que nous ferons $\varpi = 0$, $\tau'_1 = 0$; on a ainsi

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}
&\delta C = \delta C_1 = 0,\\
&\delta D = \delta D_1 = E'\sin\tau'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par ω et ω_1 les vitesses de propagation des vibrations transversales et des vibrations longitudinales dans le premier milieu, par ω' et ω'' les vitesses de propagation des deux vibrations transversales dans le second milieu, on a

$$\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1) = \sin^2\alpha' - \sin^2\alpha_1 = \frac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\sin^2\alpha';$$

cette quantité est réelle. Les formules relatives à la réfraction uniradiale se réduisent ainsi à

$$(23)\left\{\begin{aligned}
C\ &= E'\cos\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha},\\
D\ &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\cos(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E'\sin\tau'\,\frac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\,\frac{\sin\alpha'}{2\cos\alpha},\\
C_1 &= E'\cos\theta'\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha},\\
D_1 &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E'\sin\tau'\,\frac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\,\frac{\sin\alpha'}{2\cos\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

La vibration incidente et la vibration réfléchie sont rectilignes; leurs azimuts sont donnés par les formules

$$(24)\quad \begin{cases} \tang\theta = \tang\theta' \cos(\alpha'-\alpha) + \dfrac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\,\dfrac{\sin^2\alpha'\sin\tau'}{\cos\theta'\sin(\alpha'+\alpha)}, \\ \tang\theta_1 = \tang\theta' \cos(\alpha'+\alpha) + \dfrac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\,\dfrac{\sin^2\alpha'\sin\tau'}{\cos\theta'\sin(\alpha'-\alpha)}. \end{cases}$$

Le rayon lumineux réfracté fait avec la normale au plan de l'onde un angle très-petit γ', et les deux angles τ' et γ' qui s'évanouissent ensemble sont sensiblement proportionnels. Posons

$$\frac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\sin\tau' = m\tang\gamma';$$

les formules (24) deviennent

$$(25)\quad \begin{cases} \tang\theta = \tang\theta' \cos(\alpha'-\alpha) + \dfrac{m\sin^2\alpha'\tang\gamma'}{\cos\theta'\sin(\alpha'+\alpha)}, \\ \tang\theta_1 = \tang\theta' \cos(\alpha'+\alpha) + \dfrac{m\sin^2\alpha'\tang\gamma'}{\cos\theta'\sin(\alpha'-\alpha)}. \end{cases}$$

Si $m = 1$, ces formules sont précisément celles qui ont été trouvées par Mac-Cullagh, en partant d'idées tout à fait différentes de celles de Fresnel, et qui ont été vérifiées par les expériences de M. Seebeck, relatives à l'angle de polarisation. Mais ces expériences, comme nous l'avons déjà remarqué au n° **11**, ne paraissent pas avoir l'importance qu'on leur attribuait; il est très-probable que, dans le voisinage de cet angle, la vibration transversale réfléchie est non pas rectiligne, mais elliptique, comme cela a lieu dans les milieux isotropes, et que M. Seebeck observait, non une extinction complète, mais le minimum du petit axe de l'ellipse.

Quant à la troisième cause de perturbation, celle qui provient de la vibration longitudinale réfractée, elle introduit probablement dans les formules de nouveaux termes imaginaires; de sorte que le coefficient d'ellipticité de la vibration transversale réfléchie résulte de la combinaison de deux termes qui s'ajoutent ou se retranchent; on conçoit que ce coefficient puisse même changer de signe suivant la position du cristal. C'est une observation qui a été faite par M. Jamin sur le spath.

15. Jusqu'à présent nous n'avons traité que le cas de la réfraction uniradiale. Les formules (19) donnent une solution particulière des équations linéaires (14), avec une constante arbitraire E′. L'hypothèse E′ = o fournira une seconde solution particulière, avec une autre constante arbitraire E″. La somme de ces deux solutions particulières sera la solution générale :

$$(26)\left\{\begin{aligned}
C &= \sum E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'}\\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi},\\
D &= \sum E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\cos(\alpha'-\alpha+\varpi)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi}\\
&\quad+\sum E'\sin\tau'\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi}\\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi},\\
C_1 &= \sum E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'}\\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi},\\
D_1 &= \sum E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha'+\alpha+\varpi)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi}\\
&\quad+\sum E'\sin\tau'\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi}\\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

Le signe $\sum$ indique la somme de deux termes; pour avoir le second terme, il suffit de remplacer dans le premier E′, α', θ', τ' par E″, α'', θ'', τ''.

Dans la pratique, on donne le rayon incident, c'est-à-dire C et D; des deux premières équations on déduira E′ et E″, et ensuite des deux dernières C_1 et D_1. Mais on peut simplifier la résolution en négligeant les quantités petites du second ordre.

NOTE DE M. DE CALIGNY

Sur un moyen d'éviter l'oscillation en retour dans une de ses machines hydrauliques, sans que l'on soit obligé d'augmenter la profondeur des fondations, ni d'employer des soupapes ou autres obturateurs gardant l'eau dans deux sens opposés alternativement.

Dans l'appareil à élever de l'eau au moyen d'une chute d'eau et d'un tube vertical oscillant, il y a du temps perdu à cause de l'oscillation en retour. Si cela n'a pas beaucoup d'importance quand le cours d'eau moteur n'est pas très-abondant, il serait cependant utile d'éviter cet inconvénient, notamment dans les circonstances où il faut non-seulement élever de l'eau, mais la conduire à de grandes distances par un système donné de tuyaux de conduite. Voici un moyen d'atténuer cet inconvénient par l'étude de quelques combinaisons dont les principes sont bien nouveaux.

On remarquera d'abord qu'au lieu de faire verser l'eau immédiatement par le tuyau d'ascension de cette machine, si ce tuyau est suffisamment prolongé, on peut y faire monter l'eau beaucoup au-dessus de la hauteur où elle doit verser, et la faire décharger ensuite par une seconde oscillation un peu au-dessous de la hauteur de son centre de gravité, pourvu qu'une cause quelconque empêche de revenir en arrière vers le bief d'amont la colonne liquide qui se déchargerait ainsi après être montée dans le tuyau vertical dont il s'agit. Cette oscillation de décharge pourrait se faire par un tuyau recourbé du côté d'aval.

Si l'on suppose maintenant qu'un clapet ordinaire empêche l'eau du tuyau vertical de revenir du côté d'amont, tant que cette eau sera au-dessus du bief d'amont l'oscillation de décharge se fera comme si la communication avec le tuyau de conduite d'arrivée était irrévocablement fermée. Mais quand la colonne sera descendue au-dessous du

niveau de ce bief, l'eau de ce dernier tendra à venir se mêler avec celle qui se décharge. Cependant, si le tuyau d'arrivée est assez long par rapport au tuyau de décharge, l'inertie de l'eau contenue dans le premier fera en quelque sorte fonction de soupape, et l'eau d'amont n'aura pas le temps de venir en quantité sensible pendant la fin de la décharge. Si même le tuyau d'arrivée avait une très-grande longueur par rapport au tuyau de décharge, on pourrait supprimer entièrement ce clapet.

Il reste à examiner comment doit se comporter le système de fermeture du tuyau de décharge, et si l'on peut se dispenser d'en avoir un qui garde alternativement l'eau dans les deux sens. Cela dépend du rapport de la longueur du tuyau d'arrivée à celle du tuyau de décharge.

On sait par ce que j'ai dit dans ce journal, dans mes Mémoires sur les ondes, relativement au mécanisme intérieur de l'*onde solitaire*, que si un tuyau de conduite très-mince, ouvert par les deux extrémités, disposé horizontalement et croisé avec un tuyau vertical, aussi ouvert par les deux bouts, et formant avec le premier une sorte de grand T renversé, contient de l'eau en mouvement dans la partie en amont de la branche verticale, et de l'eau en repos dans la partie d'aval, les dimensions peuvent être disposées de telle sorte, dans certaines circonstances, que la force vive de l'eau de la colonne d'amont, laquelle finit par être réduite au repos, passe dans la colonne d'aval, sauf les résistances passives, après avoir fait osciller l'eau dans la branche verticale. C'est un effet parfaitement analogue qui se présente dans le mouvement de l'*onde solitaire*.

Si maintenant on suppose, dans l'appareil dont il s'agit aujourd'hui, que le tuyau latéral dit de décharge débouche dans un réservoir ayant son niveau à la même hauteur que celui d'amont, on se trouvera encore dans des circonstances analogues à ce qui vient d'être dit, à partir du moment où l'eau arrivera, dans le tuyau vertical, à la hauteur du niveau d'amont.

Supposons que le réservoir du côté d'aval ait son niveau plus élevé, et qu'un clapet empêche l'eau élevée dans ce dernier de revenir en arrière. La colonne liquide, en montant dans le tuyau vertical, ne commencera à agir sur celle du tuyau de décharge qu'à partir du moment où elle sera arrivée à la hauteur où l'on veut qu'elle se

verse par ce dernier tuyau, sauf les effets secondaires de la percussion provisoirement négligés.

La colonne d'arrivée devrait être plus longue, toutes choses égales d'ailleurs, pour qu'on se retrouvât dans des circonstances analogues à ce qui vient d'être dit. Quant à la hauteur de l'élévation de l'eau qui sera suffisante, il n'y a point d'abord à s'en préoccuper dans cette théorie, si l'on fait provisoirement abstraction des résistances passives, c'est-à-dire en employant d'assez grands diamètres, puisque, avec des tuyaux d'une longueur très-grande, on pourrait dans cette hypothèse élever de l'eau dans le tuyau vertical intermédiaire à une hauteur bien suffisante, en laissant écouler l'eau motrice assez longtemps par le tuyau vertical mobile alternativement soulevé.

On peut supposer les choses disposées de telle sorte que les effets diffèrent aussi peu qu'on le voudra du mécanisme ci-dessus, qui est celui de l'onde solitaire, si l'on met un clapet au tuyau d'amont. L'essentiel est de voir si la décharge se fera assez profondément dans le tuyau vertical pour que celui-ci (en un mot, la branche verticale du T renversé) puisse se relever alternativement comme celui de l'appareil à tube oscillant, mais avec oscillation en retour.

Or cela paraît assez évident d'après ce qui précède, si l'on a fait élever l'eau assez haut dans le tuyau vertical dont il s'agit; il est même possible que cette élévation soit assez grande pour qu'il reste encore du mouvement dans le tuyau de décharge au moment où le tuyau vertical sera soulevé et permettra à l'eau d'amont de s'écouler du côté d'aval, de sorte qu'une partie de cette eau sera peut-être aspirée dans le tuyau de décharge latérale qui la versera au point où l'on veut élever le liquide.

Maintenant on demandera d'après quelles bases devra être réglée la hauteur d'élévation de l'eau dans le tuyau mobile vertical pour être suffisante. Je ne peux entrer ici dans ce détail, voulant seulement exposer le principe de cette combinaison nouvelle.

Il faut tenir compte de ce qu'une partie de l'eau du tuyau d'amont continuera sans doute, au moins pendant un certain temps, à entrer dans le tuyau de décharge supérieure dont il s'agit, à l'époque où la colonne contenue dans le tuyau vertical redescend sans être encore arrivée au niveau du bief d'amont.

Il y a lieu d'espérer que le clapet d'amont pourra être supprimé. Quant au clapet du tuyau de décharge supérieure, il faut tenir compte de ce que ce tuyau sera en général le plus court, et de ce que la pression résistante qui y éteindra graduellement la vitesse sera plus grande que la pression du bief d'amont; il sera donc utile de le conserver, surtout dans le cas où la hauteur du versement au-dessus du niveau d'amont ne sera pas très-petite, et même de tenir compte de ce que l'eau ne coulera pas d'une manière continue dans ce tuyau. Plus l'eau devra être versée haut par rapport à la chute, plus il faudra tenir compte du temps de repos dans le tuyau de décharge supérieure, quand on tiendra à perdre le moins de temps possible, si l'on a non-seulement de l'eau à élever, mais aussi à en conduire à de grandes distances.

On peut encore faire verser l'eau élevée par le sommet du tuyau mobile, et disposer le niveau du réservoir de décharge latérale à la hauteur du niveau du bief d'amont ou un peu au-dessus. Ce cas est celui dont la démonstration est la plus évidente, parce qu'il se rapporte plus directement à celui des tuyaux croisés en forme de T renversé. Ces principes m'ont paru intéressants, même abstraction faite de l'utilité qu'ils pourront avoir dans la pratique.

Principes de plusieurs systèmes de pompes à colonnes liquides oscillantes et à flotteur;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

I. — *Pompe sans piston ni soupape.*

J'ai communiqué verbalement à la Société Philomathique de Paris, le 9 mai 1840, le principe de cette pompe, dont j'ai eu depuis occasion de me servir pour amorcer mon moteur hydraulique à flotteur oscillant; mais je n'avais pas fait alors mes expériences sur le moyen de diminuer la résistance de l'eau dans les coudes à angle droit au moyen de lames concentriques, et je n'avais pas encore essayé pour ce genre de machines l'emploi des tuyaux en planches de grandes dimensions.

Cette pompe, telle que je m'en suis servi, se réduit à un tuyau vertical enfoncé en partie au-dessous du niveau de l'eau à épuiser, et recourbé à son extrémité inférieure de manière à déboucher à une certaine distance dans cette eau par une bouche évasée, à une profondeur convenable. Un flotteur, qui est la seule pièce mobile du système, met la colonne liquide en oscillation dans ce tuyau dont les extrémités sont toujours ouvertes, et à chaque période il se jette de l'eau au sommet du tuyau vertical. Ce flotteur, alternativement abandonné à son propre poids, est alternativement soulevé par le moteur.

Il est à remarquer qu'à chaque période, le flotteur occupant une partie du sommet du tuyau vertical, de manière que le versement de l'eau élevée se fait autour de lui dans un espace annulaire, il résulte de cette circonstance du mouvement un véritable rétrécissement graduel, le flotteur étant inférieurement terminé en pointe; de sorte que cela augmente la hauteur à laquelle le versement peut se faire, mais aussi cela augmente la vitesse de l'eau à sa sortie.

Il résulte de la manière dont les sections sont modifiées par le flotteur une différence notable dans la durée des oscillations de la colonne

liquide. Quand on supprime le flotteur, ces oscillations augmentent de durée, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte au moyen de la théorie des oscillations de l'eau dans les tuyaux que j'ai publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. III, 1re série, après l'avoir présentée à l'Académie en 1837. Ainsi, dans le cas de cette expérience, la rapidité des oscillations était augmentée d'environ un sixième.

Cet appareil doit donner un effet utile supérieur à celui de mon moteur hydraulique de flotteur oscillant qui a été l'objet de deux Rapports favorables à l'Académie. En effet, dans l'appareil considéré comme moteur hydraulique, il y a une soupape cylindrique; il en résulte une cause quelconque de perte de force vive ou de travail qui n'existe pas dans l'appareil considéré comme pompe sans soupape. L'effet utile a été favorablement jugé par l'Académie pour le moteur hydraulique, et il est bien probable que cette pompe sera encore plus facilement applicable avec un assez grand effet utile.

Quant à la profondeur du tuyau de conduite, on peut remarquer que ce tuyau pouvant être maintenant construit en bois, de façon à avoir une section rectangulaire dont le plus grand côté sera horizontal, cela diminuera cette profondeur. Dans ce cas, le flotteur aurait aussi une section rectangulaire. La seule partie de la construction qui puisse offrir quelque difficulté pour une application *rustique* consiste dans les précautions à prendre pour que le flotteur n'éprouve point de percussions contre les parties fixes de l'appareil. Mais cela n'est point une difficulté sérieuse.

La mise en train est facile. On laisse le flotteur s'enfoncer à chaque période dans la colonne liquide descendante. La première fois qu'il descend, il trouve l'eau au repos, ce qui la fait monter autour de lui, en vertu de la résistance opposée par l'inertie du reste de l'eau contenue dans le tuyau de conduite. Cette première ascension est suivie d'une descente sur laquelle on fait agir le flotteur par son poids, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'eau arrive au sommet du tuyau vertical. Alors l'appareil est en train. Il n'y a d'ailleurs rien de délicat dans cette manœuvre, l'instant de l'action alternative du flotteur n'ayant rien de nécessairement précis, au moins pour un tuyau de conduite qui n'est pas trop court.

Cette pompe élevait l'eau à $1^m,50$ de haut, dans un tuyau de 40 centimètres de diamètre, au sommet duquel elle versait à chaque période. Les détails de la construction de ce tuyau n'auraient aucun intérêt quant à cette pompe, dont les effets ne furent alors étudiés que très-provisoirement, parce que je ne savais pas encore moi-même qu'elle pouvait être exécutée à peu de frais au moyen de recherches que j'ai faites depuis sur divers phénomènes.

Mais il était utile de montrer par des faits la réalité de l'idée et la facilité de la mise en train ; car il ne faut pas confondre cette pompe avec le tube conique oscillant sans flotteur, que j'avais d'abord présenté il y a très-longtemps à la Société Philomathique de Paris, sous une forme qui exige une certaine étude pour la mise en train, et dont l'avantage était seulement alors dans l'extrême modicité de son prix. Une Note beaucoup plus étendue sur la pompe conique est publiée dans le tome XI, 2e série, du *Journal de Mathématiques*.

Quant à la pompe à flotteur dont il s'agit ici, on peut réduire à très-peu de chose la perte de travail en frottement au moyen de la grandeur du diamètre du tuyau fixe. La perte de force vive provenant de la vitesse de sortie alternative de l'eau à l'extrémité inférieure peut être bien atténuée au moyen d'un évasement assez graduel.

Dans ma Note précitée sur les pompes coniques publiée dans le tome XI, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, j'ai donné la méthode au moyen de laquelle on peut déterminer l'angle le plus convenable pour que la colonne liquide s'évase à son entrée dans le réservoir d'où elle part, sans qu'il y ait trop de force vive. On peut revoir les chiffres de la Note dont il s'agit, pour se former une idée de ce genre d'effet. Il sera bon d'ailleurs de faire l'angle de convergence moindre que cela n'est indispensable.

Dans l'appareil dont il s'agit aujourd'hui, comme dans plusieurs autres de mon invention, la longueur du tuyau de conduite fixe est un obstacle à cause du prix qui en résulte. On pourra modérer cette longueur, en exagérant, comme je viens de l'indiquer, celle de la partie conique évasée, pour qu'il n'y ait pas de changement brusque de vitesse, et comme il n'y a point de passages plus ou moins étranglés par une soupape ou un tube mobile, puisqu'il n'y a d'autre pièce mobile qu'un flotteur, il ne paraît pas aussi utile que pour d'autres systèmes

de mon invention de donner une grande longueur au tuyau de conduite.

Quoi qu'il en soit, cet appareil me semble destiné à résoudre, au moins par un fait scientifique, le problème de l'élévation de l'eau à de petites hauteurs, au moyen d'une pompe donnant un effet utile au moins aussi grand que celui des bonnes pompes pour les élévations à de grandes hauteurs, pourvu qu'on veuille faire la dépense d'un tuyau de dimensions convenables. On sait que la difficulté de ce problème a été souvent signalée par les plus savants hydrauliciens.

Si l'on veut élever de l'eau à des hauteurs médiocres, mais plus grandes par rapport à la course du flotteur, l'appareil, sans addition d'autres pièces mobiles, deviendra d'une construction un peu moins simple, mais plus intéressante.

Le flotteur fonctionnera alors dans la plus grosse branche d'un siphon renversé à branches de diamètres inégaux. La quantité d'eau versée alternativement au sommet de l'autre branche devra, en général, être petite par rapport à l'espace que parcourra le flotteur.

L'introduction alternative d'une quantité d'eau pour la remplacer dans la masse liquide oscillante ne peut pas donner lieu à une perte de force vive bien importante, quand même elle tomberait par un orifice ordinaire de la hauteur du niveau de l'eau à épuiser sur le sommet variable de l'extrémité de la colonne dans la plus grosse branche, où l'on suppose au flotteur une course petite par rapport à la hauteur de versement de la branche d'un diamètre moindre. Mais il est utile de montrer que cette perte peut même être bien atténuée au moyen d'une combinaison de niveaux dont le principe est analogue à ce qui se présente dans certaines ondes dites *solitaires*.

Il suffit de faire arriver l'eau dont il s'agit par un tuyau latéral d'une longueur convenable, débouchant par une extrémité dans l'eau à épuiser, et par l'autre dans le système au-dessous des niveaux variables de l'eau en oscillation. On prolongera les parois de la grosse branche au-dessus du niveau de l'eau à épuiser. Si les oscillations de la colonne liquide sont disposées de manière à s'élever alternativement dans cette branche au-dessus de ce niveau, on conçoit que la colonne liquide en mouvement dans le tuyau latéral peut être alternativement réduite au repos, à cause des pressions exercées sur elles pendant

qu'il y a de l'eau au-dessus de ce même niveau dans la même branche. L'avantage de cette disposition est de permettre d'employer utilement la force vive de la quantité d'eau qui entre périodiquement dans le système pour remplacer l'eau élevée. J'ai montré, notamment dans le *Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1re série, comment des effets curieux de ce genre se présentent dans l'onde dite *solitaire* et en expliquent des phénomènes intéressants.

Abstraction faite de l'utilité industrielle de ces combinaisons, il est intéressant, au point de vue des principes du moins, de conserver la trace des moyens divers de faire entrer l'eau d'un réservoir dans une colonne liquide oscillant dans un tuyau plongé en partie dans ce réservoir.

Je rappellerai donc que, dans le tome VIII, 1re série, du *Journal de Mathématiques*, j'ai décrit des expériences d'où il résulte combien l'état d'oscillation d'une colonne liquide diminue la moyenne des pressions latérales sur un point donné des branches verticales, surtout dans certaines circonstances. A la fin du Mémoire que je viens de rappeler, se trouve une Note de M. Combes, qui a eu la complaisance de donner quelques développements à ce principe que j'avais trouvé. J'apprends que ce principe a attiré plus spécialement depuis l'attention des savants, et que même il est signalé, *d'après le Mémoire dont il s'agit*, parmi les questions spécialement choisies pour les exercices relatifs aux examens pour la licence.

Au moyen de ce principe, l'eau à épuiser peut entrer latéralement dans le système, et en sortir par l'extrémité inférieure, sans qu'on soit obligé de la faire sortir comme ci-dessus par le sommet d'un tuyau.

Quant à ces applications aux moyens de faire entrer l'eau alternativement sans pièce mobile dans ces pompes à flotteur, l'expérience seule pourra décider la question pratique. Mais ce procédé d'introduction et d'expulsion de l'eau à épuiser m'a paru mériter d'être signalé comme exemple d'application d'un des principes exclusivement dus à mes recherches. Quant à la pratique, il est d'ailleurs possible qu'un clapet d'introduction vaille mieux; cependant, il peut toujours être utile de signaler des moyens non-seulement nouveaux, mais qui semblent au premier aperçu contraires aux effets auxquels on s'attendait généralement.

II. — *Pompe à flotteur avec soupape, la détente étant alternativement produite par une colonne liquide oscillant sur une colonne d'air.*

D'après des principes que j'ai depuis longtemps communiqués à la Société Philomathique, il est intéressant de considérer ce qui se présente dans toutes les machines oscillantes, lorsque, dans le but de diminuer le chemin parcouru par les résistances passives à chaque période, on fait arriver une des extrémités d'une colonne liquide en oscillation dans un matelas d'air dont les dimensions règlent le chemin qu'il est nécessaire de parcourir pour éteindre le mouvement de cette colonne *sans choc brusque*.

Voyons donc ce qui arrivera dans la pompe oscillante, objet de la description précédente, où il y a un siphon renversé, lorsqu'on fera arriver ainsi dans un matelas d'air celle des extrémités de la colonne oscillante dans laquelle on n'entretient pas le mouvement immédiatement par l'action alternative d'un flotteur. Le chemin parcouru par la colonne oscillante sera diminué, ce qui n'empêchera pas le matelas d'air de faire plus ou moins le vide en se détendant, par la raison même qu'il aura été comprimé plus fortement.

On conçoit donc qu'il y aura une époque à laquelle il se produira une succion qui pourra faire entrer dans le siphon renversé, par une soupape inférieure, une partie de l'eau d'un réservoir dans lequel la courbure est plus ou moins engagée.

Une partie de l'eau contenue dans le siphon sera par suite versée au sommet du tube dans lequel joue le flotteur oscillant mis en action par le moteur.

Étant donnée une colonne liquide d'une certaine longueur dans le siphon renversé, si l'on plonge le flotteur par l'extrémité ouverte, on augmentera la pression sur le matelas d'air disposé à l'autre extrémité, et c'est une raison pour qu'une diminution de pression en résulte à la période suivante sur le matelas d'air, qui se détendra, surtout quand on retirera le flotteur, les mouvements étant bien combinés. Il est évident qu'au bout de quelques périodes la continuation d'un effet analogue produit par l'action alternative du flotteur élèvera la colonne jusqu'au sommet et produira l'effet voulu, si l'appareil est bien disposé.

Un auteur allemand, je crois, dont je ne sais pas le nom, avait proposé avant moi d'élever de l'eau par un principe semblable, mais avec cette différence essentielle que le tube d'ascension était *mobile*. Cet auteur utilisait le genre de mouvement qu'on cherche à éviter de donner aux baromètres dans la crainte de les briser.

L'appareil, tel qu'il l'avait disposé, pouvait marcher sans que son extrémité inférieure fût enfoncée dans l'eau à une profondeur bien notable. Dans l'appareil tel que je l'ai proposé, les tuyaux étant *fixes*, le moteur, si c'est un homme, peut être naturellement conduit par l'oscillation de la colonne liquide. Tandis que si le tube, et en un mot si tout l'appareil est *mobile*, il y a probablement à saisir, comme dans ma pompe conique quand un balancier avec une sorte de pendule n'y est pas joint, une sorte de *tour de main*, selon une expression reçue.

Depuis que j'ai présenté cet appareil à flotteur à la Société Philomathique, le 19 août 1843, un ingénieur qui ne connaissait pas ce qu'en dit le journal *l'Institut* l'a présenté de son côté. Mais il est le premier à convenir avec toute la loyauté possible de ma priorité. Si d'ailleurs j'ai étudié dans les *Annales des Mines*, 1838, les effets d'une colonne d'air alternativement comprimée et dilatée d'une manière analogue, je conviens que l'idée d'en faire le principe d'une pompe mue par un homme appartient à l'auteur allemand dans les limites indiquées ci-dessus. Je regrette vivement ne pouvoir retrouver le nom de cet auteur.

III. — *Pompe à flotteur aspirant au moyen d'un nouveau principe.*

Un tuyau courbé en arc de cercle et ouvert à une de ses extrémités, étant suspendu à un axe autour duquel il peut osciller librement, est plongé en partie, *à une petite profondeur* (par la portion inférieure de sa courbure), dans l'eau à épuiser. Dans la partie plongée, il est séparé en deux par une cloison près de laquelle est disposée une soupape ouvrant de dehors en dedans, et par laquelle doit être aspirée l'eau qui sortira par l'extrémité du tuyau qui est toujours ouverte.

Le mouvement de ce tuyau est réglé au moyen d'un flotteur qui donne lieu, comme on va voir, au jeu de cette espèce de pompe aspirante sans piston.

Il est clair que, si l'on soulève de l'eau dans le tube avec une vitesse suffisante, et que l'on diminue la vitesse du tube sans agir directement sur l'eau, celle-ci continuera à monter en vertu de sa vitesse relative, en produisant une aspiration; mais on n'agirait pas selon les vrais principes de la mécanique si l'on produisait cet effet par le moyen d'un obstacle extérieur.

Or, si un flotteur entraîné dans le mouvement du tube sort de l'eau à épuiser ou d'un réservoir particulier disposé à cet effet, à l'époque où l'on veut que le tube diminue de vitesse, on jouit de cet avantage que, pour y parvenir, on n'a à craindre aucune percussion entre des corps solides comme si l'on avait à craindre l'inertie d'un obstacle extérieur.

Lorsque le système est ramené en arrière par le mouvement oscillatoire imprimé par le moteur, l'immersion du flotteur diminue la vitesse du tube sans agir aussi directement sur l'eau qu'il contient, et dont la force vive peut être en partie utilisée dans le balancement rétrograde dont l'effet reviendra en aide à l'effet direct pendant lequel se fait l'aspiration précitée, si le moteur n'agit que dans un sens.

On voit que l'idée de cet appareil consiste dans le mode d'action du flotteur, qui permet de produire l'effet voulu sans choc, malgré l'inertie des pièces mobiles, comme si l'on disposait de *forces immatérielles*. On voit aussi qu'il n'y a aucun effet de *canne hydraulique*, bien que la partie inférieure du tube ne soit enfoncée qu'à une très-petite profondeur dans l'eau à épuiser.

S'il est difficile de prévoir quel peut être le degré d'utilité de ce principe, il m'a semblé assez nouveau pour être signalé comme une des choses dont il est du moins intéressant de conserver la trace, dans un recueil surtout où les idées scientifiques trouvent naturellement leur place, abstraction faite même de l'utilité qu'on pourra y trouver par la suite. Ce principe renferme d'ailleurs celui d'un nouveau *modérateur hydraulique* dont je parlerai dans une autre Note.

Principes d'une nouvelle turbine et de plusieurs roues hydrauliques à lames liquides oscillantes, suivis de Recherches historiques et critiques sur des sujets analogues;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Nouvelle turbine à lames liquides oscillantes.

J'ai présenté à l'Académie des Sciences, le 16 novembre 1863, une Note qui a été imprimée dans le *Compte rendu* de la séance du 20 décembre de la même année, sur la proposition de M. le général Poncelet. Dans cette Note, j'avais indiqué, avec une extrême réserve, le principe d'une *turbine à lames liquides oscillantes*, pensant qu'il l'avait peut-être signalé avant moi, et mentionnant d'ailleurs les aubes courbes que M. D. Girard a proposé de disposer sous les wagons d'un chemin de fer qu'il étudie. Mais ce savant général, auquel je pris le parti de soumettre mes doutes relativement à la priorité de cette idée sur les lames liquides oscillantes par ascension le long des aubes courbes d'une roue horizontale, me fit l'honneur de me répondre, le 14 décembre de la même année, qu'il n'avait pas connaissance que personne en eût fait la proposition formelle. Je crois donc intéressant d'entrer dans quelques détails.

En réfléchissant à deux turbines remarquables dessinées dans un ouvrage intitulé : *Theatrum machinarum novum, per Georgium Andream Bocklerum, architectum et ingeniarium*, traduit de l'allemand en latin par Schmitz, Cologne, 1662, *Pl. XLIV* et *L*, où l'eau semble s'élever sur les aubes courbes, et agir ensuite pendant un glissement de haut en bas, j'ai eu la pensée de la disposition dont il s'agit.

On sait que la roue verticale à aubes courbes de M. Poncelet est une véritable machine à lames liquides oscillantes, et qu'il a considéré ensuite cette roue verticale comme posée horizontalement, mais alors sans lames liquides oscillantes.

Or, je propose d'employer une forme analogue à celle de la roue horizontale de Borda, mais en faisant arriver l'eau motrice par-dessous au lieu de la faire arriver par-dessus, et en disposant la courbure des aubes de manière que l'eau y entre d'une façon analogue à ce qui se présente pour la roue verticale à aubes courbes de M. Poncelet, avec cette différence que les aubes restent toujours à la même hauteur, ce qui simplifie un peu la théorie, tout en permettant d'appliquer à cette circonstance une partie des études faites sur la roue verticale à aubes courbes [*]. Il y a des différences provenant des effets de la force centrifuge; mais on peut les atténuer en disposant les aubes courbes entre des cloisons cylindriques verticales concentriques, auxquelles on pourra provisoirement supposer la génératrice de chaque aube courbe perpendiculaire, en attendant des recherches ultérieures. Si les études faites sur les roues verticales à aubes courbes suffisent pour donner une idée de la disposition générale, le cas n'est cependant pas tout à fait le même. Selon que le diamètre de la turbine sera plus ou moins grand, il y aura sans doute des modifications à faire. Je remarquerai seulement ici une propriété dont la roue verticale à aubes courbes ne semblait pas en général susceptible.

L'eau peut entrer en même temps par plusieurs aubes au moyen de *conducteurs fixes*, d'autant plus nombreux que le diamètre de la turbine est plus grand, toutes choses égales d'ailleurs. Si l'expérience seule peut montrer quel sera le nombre de *conducteurs* le plus convenable pour chaque diamètre, les études déjà faites sur les mouvements de l'eau dans les roues verticales à aubes courbes jetteront beaucoup de jour sur cette question.

Il n'est peut-être pas inutile, au reste, de remarquer que si dans ces roues verticales il n'est pas en général tout à fait rigoureux de

---

[*] M. le commandant Ordinaire de Lacolonge a publié en 1854, dans le *Génie industriel*, un long Mémoire en trois parties sur les roues verticales à aubes courbes. Dans ce Mémoire, il fait connaître des règles de construction et des procédés de calcul qui lui ont été communiqués par M. Poncelet, et qui comprennent tous les détails essentiels pour le perfectionnement et l'établissement de ces moteurs célèbres, en même temps que les résultats d'expériences concernant la roue de la poudrerie d'Angoulême, résultats qui confirment pleinement l'utilité de ces dispositions.

considérer l'eau comme sortant aussi bas qu'elle est entrée, cela sera rigoureux dans la turbine à lames liquides oscillantes si l'axe est bien vertical. Quant au nombre d'aubes qui dans chaque circonstance doivent se trouver entre deux conducteurs fixes, les observations qui ont été ou seront facilement faites sur les roues verticales à aubes courbes permettront sans doute de lever toute difficulté sérieuse sur les points essentiels à étudier pour diminuer le nombre des turbines dans les circonstances où l'on aura beaucoup d'eau motrice à sa disposition. Cette turbine pouvant avoir ses avantages, je la signale de nouveau puisque personne, à ma connaissance, n'en a réclamé la priorité. Je n'y attache d'ailleurs aucun amour-propre, reconnaissant que si elle est utile, l'honneur doit en revenir principalement à M. Poncelet.

Principes d'une nouvelle roue hydraulique verticale à tuyaux plongeurs et à lames liquides oscillantes dans les biefs d'amont et d'aval.

Cette roue se compose d'un tambour portant extérieurement un anneau creux de section rectangulaire, partagé en plusieurs tuyaux par des aubes d'une forme particulière, en amont et en aval de chacune desquelles des orifices rectangulaires sont disposés sur la surface courbe extérieure de cet anneau; de sorte que chacun de ces tuyaux est percé latéralement à ses deux extrémités, qui doivent être bouchées en temps utile au moyen d'un coursier inférieur dans lequel elles viennent s'engager successivement. Cette roue formant elle-même une partie du barrage, comme les anciennes roues *à pression*, se présente latéralement à l'eau du bief supérieur, qui entre par l'extrémité inférieure de chaque tuyau partiel, dont le sommet achève au besoin de se remplir par son immersion dans ce même bief.

Quand l'orifice inférieur de ce tuyau s'engagera dans le coursier dont on vient de parler, il y aura un étranglement momentané donnant lieu à une perte de force vive dont la limite est facile à calculer. Mais, par suite de la diminution de pression intérieure qui en résultera, la colonne liquide contenue dans le tuyau partiel prendra de haut en bas la vitesse nécessaire, afin qu'il n'y ait pas, pour certaines proportions du

tuyau, de percussion bien sensible à l'époque où son orifice sera masqué par ce coursier. Jusqu'ici les effets paraissent analogues à ceux des anciennes roues hydrauliques *à pression coulant à plein coursier;* mais les aubes, *protégées* en amont et en aval par les espèces de tuyaux qui les séparent, ne viendront plus frapper l'eau du bief supérieur en s'y enfonçant, et ne rencontreront plus que peu de résistance dans l'eau du bief d'aval.

Au lieu d'occasionner un jaillissement de l'eau du bief supérieur en y pénétrant avec une certaine vitesse, cette roue donnera lieu à une espèce de frottement latéral. Il est à peine nécessaire d'ajouter que les aubes qui séparent les tuyaux doivent être disposées convenablement en dessus et en dessous pour éviter autant que possible les déviations des filets liquides, et que ce sera d'ailleurs un des cas où l'on pourra appliquer le système des lames concentriques dont je me suis servi pour diminuer la résistance de l'eau dans les coudes; il est évident aussi que, dans le sens du rayon de la roue, la profondeur du tuyau devra ne pas dépasser certaines limites, mais qu'il sera bon que chaque tuyau partiel ait toute la longueur possible que permettra le diamètre de la roue.

Quand ce tuyau est dégagé du coursier précité, il peut être entièrement plongé dans l'eau du bief d'aval. La vitesse de la roue étant supposée à peu près uniforme, quand l'extrémité devenue supérieure du tuyau dont il s'agit sort du bief d'aval, l'eau contenue dans ce tuyau tend à monter dans la partie qui s'émerge. Mais elle ne peut y monter, en vertu de sa vitesse acquise, qu'en perdant une partie de cette vitesse. Il faut donc qu'une certaine quantité d'eau soit abandonnée au bief d'aval par l'autre extrémité, devenue inférieure et ayant un orifice latéral d'une grandeur convenable.

Si les vitesses et les longueurs du tuyau partiel sont calculées selon certaines lois, on conçoit que la colonne liquide dont il s'agit peut avoir le temps d'osciller de manière que, par leur mode d'action, les pressions latérales rentrent dans le système de celles qui se présentent dans les expériences que j'ai eu l'honneur de soumettre à l'Académie le 18 octobre 1841, et qui ont été l'objet d'un Mémoire suivi d'une Note de M. Combes, publiés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. VIII, 1re série, p. 23.

On croyait que les roues du genre des roues de côté coulant à plein coursier ne pouvaient utiliser une partie de la vitesse de sortie de l'eau au bief d'aval que pour les cas où l'eau de ce bief ne recouvrait point la veine de sortie donnant lieu dans le coursier à des effets depuis longtemps signalés, et dont on trouve déjà quelque indication dans un ouvrage de Nicholson (traduction de 1824, bibliothèque de l'École des Mines). Or, il résulte des considérations que je viens de rappeler, qu'il doit être facile de réaliser pratiquement, pour des roues verticales profondément immergées à leur partie inférieure, l'épargne d'une partie de la force vive perdue jusqu'à présent au bief d'aval dans les anciens systèmes ainsi immergés, l'état d'oscillation ayant, dans certaines hypothèses, la propriété de diminuer la moyenne des pressions latérales, de manière à la rendre moindre que la pression hydrostatique de l'eau du bief d'aval.

On conçoit d'ailleurs, même abstraction faite de ces considérations, que si le tuyau vertical était vidé par oscillation jusqu'à une certaine profondeur au-dessous du niveau du bief d'aval, l'eau de ce bief ne pourrait rentrer que dans une capacité fuyant devant elle, et que d'ailleurs elle y produirait un effet analogue, jusqu'à un certain point, à celui de l'eau qui entre de l'extérieur à l'intérieur de certaines roues à réaction, en donnant lieu à une diminution de pression par l'effet même de sa vitesse.

Quant à ce que j'ai dit de la manière dont les choses se passeront dans le bief d'amont à l'époque où le tuyau partiel s'engagera dans le coursier inférieur, si, d'après les indications du calcul, il ne paraît pas qu'on doive en général s'en préoccuper d'une manière bien sérieuse pour certaines proportions des tuyaux partiels, il n'est cependant pas sans quelque intérêt de conserver au moins les traces d'une combinaison ayant pour but de supprimer l'effet momentané de cet étranglement, quoique dans l'état actuel de l'hydraulique on ne connaisse pas assez quelques détails des résistances passives, notamment dans les contractions de la veine liquide pour les cas analogues.

Je suppose que chaque tuyau partiel soit momentanément bouché à l'extrémité qui est inférieure, quand il s'enfonce dans l'eau du bief d'amont. On conçoit que, dans certaines conditions, si cette extrémité est ensuite subitement débouchée à une profondeur convenable au-

dessous du niveau de ce bief, l'eau s'élancera de bas en haut, et aura le temps de monter au-dessus de ce même niveau jusqu'à l'extinction de sa vitesse; qu'alors le tuyau marchant de haut en bas plus vite que cette eau qui tend à redescendre, il se produira les effets suivants :

La colonne liquide tendra ainsi à prendre d'elle-même la vitesse de la roue, pendant qu'il continuera à entrer dans le bas de ce tuyau des quantités d'eau diminuant de plus en plus jusqu'à ce qu'elles soient sensiblement nulles lorsque la vitesse de la colonne liquide intérieure sera devenue égale à celle de la roue, et que le sommet du tuyau partiel aura en descendant atteint le sommet de cette colonne liquide.

Pour réaliser cette idée dans les limites où elle peut l'être sans trop de complication, on disposerait extérieurement à la roue dans le bief d'amont une surface courbe fixe pour chaque niveau, formant une sorte de coursier entièrement immergé, permettant d'abord à l'eau d'entrer un peu au bas du tuyau partiel, interrompant ensuite cette introduction jusqu'à une profondeur convenable, et permettant ensuite de démasquer très-vite, mais *successivement*, chacune des lames courbes concentriques de l'orifice inférieur de ce tuyau, sans empêcher le sommet de ce tuyau d'achever de se remplir au besoin par son immersion dans le bief supérieur.

En résumé, la nouvelle *roue à tuyaux* a pour but de modifier les anciennes roues à pression coulant à plein coursier, de manière à leur permettre de marcher plus vite quand elles seront assez profondément immergées. En la communiquant verbalement à la Société Philomathique de Paris, en 1845 et 1849, je n'ai pas ainsi développé les principes sur lesquels je désire surtout attirer l'attention dans cette Note, et qui permettent de montrer comment on peut appliquer un mode d'action des oscillations dans le bief d'aval, que j'avais présenté sous un autre point de vue, notamment dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1843. La possibilité de cette application montre une fois de plus l'inutilité de recherches en apparence d'abord purement spéculatives.

On connaît les expériences intéressantes de M. Mary sur les roues hydrauliques verticales à pistons, l'eau coulant à plein coursier; mais si les aubes ou pistons elliptiques qu'il a adoptés ont leurs avantages, on

va voir comment, en conservant la forme des aubes quadrangulaires de la roue annulaire de Barker, décrite par Desaguillers, on peut varier le débit au moyen d'un nouveau système de vannage.

S'il est juste de rappeler les aubes circulaires proposées par M. Legris dans son ouvrage intitulé : *la Nouvelle Mécanique manufacturière*, 1826, Paris, p. 14, *fig.* 18, *Pl. I*, cela ne diminue pas le mérite des expériences de M. Mary, qui, ayant obtenu un effet utile considérable, a spécialement appelé l'attention sur l'étude des systèmes de ce genre.

Moyens de varier le débit de l'eau motrice dans les roues de côté coulant à plein coursier, avec ou sans lames liquides oscillantes. — Détails historiques sur les roues à piston.

De Thiville a depuis longtemps étudié des moyens de varier le débit des chapelets moteurs coulant à plein coursier, et dont le but est le même que celui des roues de côté coulant aussi à plein coursier pour utiliser les chutes motrices très-variables. Il donne au coursier rectiligne de ces chapelets une section quadrangulaire, de sorte que deux faces verticales opposées peuvent se rapprocher ou s'éloigner l'une de l'autre, de manière à varier convenablement le débit de l'eau motrice.

Quant à la manière de varier la largeur des aubes, on peut employer plusieurs systèmes. Il suffit en ce moment de rappeler que de Thiville les composait pour ce cas de deux clapets, réunis par une charnière inférieure permettant à l'angle formé par ces deux clapets de s'ouvrir plus ou moins, selon le degré d'écartement des faces planes verticales dont je viens de parler.

Je me suis aperçu, en m'occupant de mes recherches sur l'histoire de l'hydraulique, qu'il y avait une ancienne disposition de roues de côté à laquelle on pourrait appliquer cette idée de de Thiville, à cause de la verticalité et du parallélisme de deux faces planes d'un coursier annulaire fixe, fendu intérieurement pour le passage des bras ou plutôt du disque, ou de la couronne à laquelle sont attachés les pistons de forme quadrangulaire. (*Voir* le *Traité de Physique* de Desaguillers, in-4°, 1751, traduction de Pezenas, *Pl. XXXIII, fig* 1, 2 et 3, t. II.)

Il ne faut pas, en effet, confondre cette disposition résultant de ce que les aubes ou pistons sont de forme quadrangulaire, avec celle des aubes ou pistons circulaires ou elliptiques, disposés d'ailleurs, il est vrai, de la même manière, et venant s'emboîter aussi de la même manière dans un coursier annulaire ou corps de pompe courbe. Ces formes circulaires ou elliptiques ont aussi leurs avantages; mais elles n'ont pas celui de permettre de varier la section d'écoulement *par le plus ou moins grand écartement de deux faces verticales, planes et parallèles,* quand on veut employer directement le poids d'une colonne liquide *ayant toute la hauteur de la chute,* comme on l'a souvent proposé pour les chutes très-variables, et notamment pour les *tide mills.*

Ce n'est pas seulement la forme quadrangulaire de la section du coursier qui permet de faire cette application d'un système particulier de vannage; mais c'est la forme dont il s'agit quand le coursier est *annulaire.* Si le fond courbe de la roue, étant d'ailleurs plein, était mobile autour de son axe, comme dans l'*Essai sur les machines hydrauliques*, etc., publié en 1777 par le marquis Ducrest, colonel en second du régiment d'Auvergne, le coursier de la roue coulant aussi toujours plein, et étant même évasé en amont pour éviter la contraction de la veine, cette forme aurait aussi des avantages particuliers, mais ne permettrait pas d'appliquer, du moins d'une manière aussi pratique, le système de vannage à faces parallèles dont je viens de parler.

Ce qui le rend pratiquement possible, si l'on fait couler à plein coursier une roue de formes analogues à la roue de côté de Barker décrite par Desaguillers, c'est que, pendant tout le temps que durera l'écoulement pour un écartement donné des faces parallèles et verticales, les pièces du coursier seront absolument fixes. Il est de plus essentiel de remarquer qu'aux époques où se fera la manœuvre de ces faces verticales, l'ajustement du fond de la roue réduit à un disque ou à une couronne ne pourra éprouver aucun changement, puisqu'on n'y aura pas même touché.

Sans entrer ici dans les détails pratiques, il m'a semblé utile de montrer une fois de plus les avantages qui peuvent résulter des recherches d'érudition; des figures oubliées dans quelques anciens auteurs pouvant ainsi conduire à des applications qui avaient échappé aux plus savants ingénieurs en Angleterre et en France.

Le système de vannage dont je viens de parler n'exige pas que les faces verticales parallèles dont il s'agit soient très-grandes; mais il faut qu'elles le soient assez pour que deux aubes consécutives ne soient pas en même temps hors du coursier. Une seule aube étant d'ailleurs dans le coursier, cela suffit pour que la pression de toute la chute agisse comme si deux aubes y étaient engagées en même temps, la partie de la colonne liquide qui est au-dessous de cette aube pouvant agir par *aspiration*.

Le système de vannage dont il s'agit ne peut s'appliquer d'une manière aussi simple au principe de la roue à tuyaux plongeurs et à lames liquides oscillantes dont j'ai donné ci-dessus la description.

Mais la question des moteurs hydrauliques est si importante, qu'il est intéressant de conserver des traces d'une disposition qui, au moins pour des dimensions médiocres, peut être étudiée sous ce rapport.

On sait qu'il y a des turbines dans lesquelles on varie la section d'écoulement en faisant glisser entre les aubes une des faces de la turbine parallèlement à l'autre face. Or, on peut disposer la nouvelle roue dont il s'agit de manière à profiter d'une disposition analogue dans les limites où la grandeur de son diamètre permettra que cette disposition soit pratique.

Je suppose d'abord qu'une roue de côté d'une assez petite largeur et de forme analogue à celle des roues ordinaires, sauf quelques précautions relativement à la distance des aubes, etc., recommandées pour celles qui coulent à plein coursier, soit appliquée dans sa partie d'amont contre un mur de barrage perpendiculaire à son axe, et devant servir de coursier avec les précautions convenables.

Ce mur sera percé d'un orifice d'une forme analogue à une partie de l'arc hydrophore et convenablement évasé du côté d'amont, de manière que l'eau motrice entre dans la roue parallèlement à son axe. Pour que la roue garde l'eau jusqu'au bas de la chute, il faut que l'arc hydrophore soit fermé sur les trois faces où le mur ne fait pas fonction de coursier. Il suffit donc que la roue ait deux surfaces courbes concentriques parallèles à l'axe de cette roue, aucune de ces trois surfaces n'étant percée.

Il est clair que cette disposition est celle d'une sorte de roue de côté pouvant couler à plein coursier, en recevant et abandonnant l'eau

latéralement, au lieu de la recevoir et de l'abandonner comme les anciennes roues de ce genre. Mais pour varier la section d'écoulement, il suffit de rapprocher ou d'éloigner du mur dont on vient de parler celle des faces planes de l'arc hydrophore qui lui est parallèle.

On ne peut se dissimuler que si, dans cette disposition, les pressions de l'eau contre les faces courbes de l'arc hydrophore ne peuvent se reporter notablement sur l'axe, puisqu'elles se contre-balancent en grande partie, il n'en est pas ainsi de celles qui agissent sur la partie plane de cet arc hydrophore, et tendent même à faire gauchir la roue.

Mais dans le cas où cet inconvénient serait sérieux, on pourrait disposer deux roues sur un même axe, de manière que ces deux roues fussent disposées entre deux murs verticaux et parallèles, barrés convenablement en amont, chacun de ces murs étant percé de manière à alimenter chacune de ces roues. On conçoit même que, si l'on ne voulait pas se réserver la possibilité de varier la section de l'arc hydrophore, on pourrait n'avoir, à proprement parler, qu'une seule roue partagée en deux par un diaphragme, et recevant l'eau de chaque côté par chacun des murs verticaux dont on vient de parler.

Quant à la manière de transformer ce système en roue à *tuyaux plongeurs et à lames liquides oscillantes,* il suffit d'ajouter à ce qui a été dit ci-dessus que : 1° les dimensions déjà limitées dans le sens de l'axe le seront encore dans l'autre sens, par cette circonstance que le rayon de la surface courbe intérieure ne doit pas être trop différent de celui de la surface courbe extérieure, pour que les conditions de la question ne soient pas trop changées, et que 2° si l'on veut varier la section de l'arc hydrophore au moyen du déplacement d'une surface plane qui sera d'ailleurs convenablement attachée à la roue pour une section donnée, il faudra renoncer à l'avantage résultant de l'emploi des lames courbes concentriques dans les espèces de coudes où elles sont utiles.

On conçoit d'ailleurs comment la quatrième face de chaque tuyau partiel peut être composée d'une surface plane verticale, les effets étant, du reste, analogues à ceux qui sont décrits ci-dessus, pourvu que les murs de barrage soient convenablement disposés en aval, l'échancrure des murs de barrage en amont s'élevant toujours, d'ailleurs, au-dessus du niveau du bief supérieur.

Quant aux anciennes roues de côté coulant à plein coursier, les

aubes étaient quadrangulaires, au moins dans celles dont j'ai connaissance. M. le général Poncelet, d'après l'invitation duquel j'ai repris mes études critiques sur les machines hydrauliques, a bien voulu me communiquer des dessins qui avaient échappé à mon attention dans l'*Encyclopédie méthodique,* par la raison même qu'au premier aperçu ces dessins ressemblaient à ceux des roues de côté ordinaires; de sorte que, si l'on n'avait pas connu la roue de côté de Barker précitée, on ne se serait peut-être pas aperçu de ce qu'il y a de particulier dans leur construction.

Ces roues sont décrites dans les articles sur la papeterie et la métallurgie; mais je me suis aperçu, en y réfléchissant, que ceux qui ont fait ces dessins pour l'*Encyclopédie méthodique* n'avaient probablement pas compris ce qu'il y avait de particulier dans la disposition de ces roues. Cela s'explique parce qu'il ne s'agissait pas, à proprement parler, d'hydraulique dans les articles sur les arts dont ils traitaient, ces roues n'y étant indiquées que comme un moteur quelconque.

Il est certain que le coursier annulaire, très-bien dessiné dans l'ouvrage de Desaguillers, n'y est pas représenté. Or, il est facile de voir que sans ce coursier, connu déjà alors depuis longtemps, la disposition des roues de côté décrites dans les articles précités de l'*Encyclopédie méthodique* serait si complétement défectueuse, qu'il paraît impossible d'admettre que ce coursier n'ait pas existé dans les circonstances dont il s'agit, puisque l'ouvrage de Desaguillers était traduit en françsis si longtemps avant la publication de l'*Encyclopédie méthodique*.

J'ai cru intéressant d'entrer dans ces détails, parce qu'il paraît en résulter que des aubes quadrangulaires attachées à un disque vertical ou à une couronne verticale, ayant d'ailleurs beaucoup plus d'épaisseur que dans les dessins précités de Desaguillers, ont été exécutées avec succès dans le XVIII[e] siècle.

Je remarquerai cependant que sur les dessins dont il s'agit les aubes paraissent trop nombreuses pour bien remplir le but des roues de côté *coulant à plein coursier,* même avec la disposition de l'évasement ayant pour but, du moins dans l'ouvrage de Ducrest, d'éviter la contraction de la veine liquide à l'entrée du coursier. L'abbé Mann est le premier qui, à ma connaissance, ait proposé de ne mettre que six ou

huit aubes à des roues de côté, ce qui ne peut avoir de sens que pour une roue coulant à plein coursier. (Voir *Mechanics for practical men*, par Gregory, 1825, p. 318.)

Pour achever ce qu'il y a d'essentiel dans l'histoire des roues hydrauliques coulant à plein coursier, je dirai quelques mots de la roue à aubes circulaires mobiles de M. Armstrong. (*Voir* le *Mechanics Magazine*, 1838, t. XXX, p. 209; 1840, t. XXXII, p. 229; 1841, t. XXXIV, p. 177.) Dans la roue de M. Armstrong, les aubes, au nombre de quatre, tournent alternativement sur leur axe de manière à se confondre avec le disque circulaire qui entre dans un tuyau courbé en arc de cercle, ouvert à son extrémité inférieure pour le dégagement de l'eau, et à son extrémité supérieure pour recevoir la pression d'une haute colonne liquide arrivant par un tuyau dont la partie courbe précitée n'est que le prolongement fendu intérieurement pour le passage du disque auquel les aubes sont attachées.

Ces aubes, en entrant dans le tuyau courbe, tournent sur leur axe, de manière à recevoir la pression par-dessus, comme un piston de machine à colonne d'eau. Quand elles sont sorties à la partie inférieure du tube, d'où l'eau motrice descend au bief inférieur, elles reprennent leur première position en se repliant, comme je l'ai indiqué, dans le disque, de manière à rencontrer moins de résistance dans le fluide qu'elles traversent.

Il paraît que l'effet utile de cette roue est considérable. Les pertes d'eau sont évitées par une combinaison intéressante de cuirs. Quant à la roue décrite du tome XXX du *Mechanics Magazine*, que je n'ai pas en ce moment sous les yeux, je ne me souviens pas si elle est de M. Armstrong; ce n'est d'ailleurs qu'une simple roue de côté élévatoire dont les aubes sont mobiles.

Considérations nouvelles sur quelques turbines décrites et figurées dans quelques ouvrages du XVIᵉ *siècle.*

Parmi les roues hydrauliques décrites en 1588 dans un ouvrage de Ramelli intitulé : *Le diverse ed artificiose machine, ecc.*, il y en a dont les aubes sont de véritables surfaces cylindriques à génératrices ver-

ticales qui, au premier aperçu, ont beaucoup de ressemblance avec celles d'une turbine de M. Poncelet. Ainsi, dans celle de la *fig.* 3, p. 5, le canal conducteur amène l'eau motrice presque tangentiellement à l'élément extérieur de la courbure de chaque aube.

Mais, comme la surface de chaque aube se prolonge jusqu'à l'axe vertical de la roue, la veine liquide au centre de cette roue ne s'échappe pas de la même manière. En général, l'aspect de cette ancienne turbine a de l'analogie avec celui d'une roue à rayons divergents, tandis que la courbure des aubes tend à se raccorder avec la circonférence extérieure dans les leçons lithographiées de M. Poncelet, où il est d'ailleurs à remarquer qu'à l'intérieur de la roue les aubes se recourbent en arrière. Aussi cette turbine, décrite par Ramelli, offre, même à la simple vue, un caractère tout différent. Il est essentiel d'observer que les aubes de Ramelli ne sont point comprises entre deux plateaux, dont un est d'ailleurs percé au centre dans le système de M. Poncelet.

Ce dernier caractère est assez bien exprimé dans un dessin très-curieux de la *Pl. XVI* d'un ouvrage in-folio, publié à Venise vers la fin du XVIe siècle ou au commencement du suivant, intitulé : *Fausti Verantii machinæ novæ, addita declaratione latina, italica, gallica, hispanica et germanica.* Dans cette turbine, les aubes courbes ne vont plus jusqu'à l'axe et se raccordent mieux avec la circonférence extérieure que dans la turbine précitée, décrite par Ramelli. Elles sont comprises entre deux plateaux parallèles auxquels elles sont attachées. Le plateau supérieur est plein, l'inférieur est percé au centre, dans l'espace libre laissé par les aubes; il semble bien du moins, d'après le dessin, que, dans ce plateau inférieur, le cercle compris entre les aubes est entièrement enlevé.

Quant au nombre de ces aubes, s'il est évidemment trop petit, il ne paraît pas que, dans la pensée de l'auteur, ce dessin suffise pour déterminer rigoureusement ce nombre, car il y a plus d'aubes dans le moulin à vent de forme analogue décrit dans le même ouvrage. Il est vrai que, dans le moulin à vent dont il s'agit, le fluide ne peut sortir par-dessous. Il ne paraît pas, d'ailleurs, que le but de cette turbine, dans le cas particulier représenté par l'auteur, soit précisément le même que celui de la roue précitée décrite par Ramelli, dans laquelle l'eau était amenée sur chaque aube successive par un *conducteur fixe,* dis-

posé extérieurement. Le dessin de cette seconde turbine ne présente plus de conducteur, et la figure de la *Pl. XVI* précitée porte seulement pour titre : *Molæ ad rupem appensæ.* Dans cette figure, l'auteur n'indique pas d'autre but que de montrer simplement de quelle manière on peut établir une roue sur le flanc d'un rocher, c'est-à-dire en laissant plonger l'axe vertical à une profondeur convenable dans une rivière qui coule au pied de ce rocher, à un niveau qui peut varier, et dont le mouvement suffit pour faire tourner cette roue, quoiqu'elle y soit entièrement plongée. On peut même se demander, surtout en comparant le dessin de cette roue à celle du moulin à vent précité, si, dans la pensée de l'auteur, le plateau inférieur doit être réellement percé au centre, et s'il n'y a pas en ce point une erreur dans le dessin. On sait, en effet, que M. Cagniard de Latour a fait des expériences sur une turbine de forme analogue, dont les aubes étaient perpendiculaires à deux plateaux pleins et parallèles, et qui tournait aussi entièrement plongée dans une rivière.

L'auteur précité, le savant évêque Veranzio, connaissait probablement l'ouvrage de Ramelli, car, d'après diverses recherches, quoique la date précise de la publication de son ouvrage dont il s'agit ne se trouve point sur les exemplaires que j'ai eus entre les mains, il ne paraît pas qu'elle puisse être antérieure à 1591, ni même probablement à 1595.

Ces deux auteurs ne disent ni l'un ni l'autre si les appareils dont il s'agit sont de leur invention ; il y a même lieu de croire qu'ils regardaient la question comme ayant été présentée sous des formes assez diverses pour ne pas considérer chaque figure séparée comme exprimant toute la portée du système.

L'ouvrage de Faust Veranzio étant traduit en cinq langues, il y a eu par hasard une transposition dans le texte français de la note relative à cette roue; mais les textes des quatre autres langues étant parfaitement d'accord entre eux, comme je l'ai vérifié, il n'y a pas à s'y tromper. L'auteur était, ainsi que Ramelli, un des hommes les plus savants du XVIe siècle. Ce sont les seuls qui, à ma connaissance, aient publié, avant M. le général Poncelet, des roues à aubes courbes, à axe vertical, ces aubes ayant des génératrices verticales, et leur courbure se raccordant plus ou moins avec la direction que peut avoir l'eau affluente à

la circonférence extérieure, car il ne faut pas les confondre avec les turbines dont les aubes avaient aussi des génératrices verticales, mais dont la courbure était évidemment destinée à recevoir un choc, même quand cette courbure était repliée en arrière, vers l'intérieur de la roue, comme dans une figure du grand ouvrage de Belidor.

Quant aux conducteurs fixes amenant l'eau motrice horizontalement par toute la circonférence extérieure d'une roue à aubes et à axe vertical, j'ai signalé depuis longtemps la roue horizontale à aubes planes d'Adamson, qui recevait l'eau par toute sa circonférence extérieure (*Philosophical Magazine*, t. L, et *Journal of Arts and Sciences*, t. IV). Mais cela ne se rapporte pas à la turbine de M. Poncelet, qui n'a pas proposé, je crois, de faire arriver l'eau par toute la circonférence, mais plutôt de n'employer, en général, qu'un seul conducteur. Je passe donc au point le plus essentiel, quant à la marche de l'esprit humain dans la découverte des principes.

On demandera sans doute si les savants précités du XVIe siècle ont eu une idée sérieuse du bon emploi de la force vive, tel qu'il est compris aujourd'hui dans les turbines. Leurs textes sont trop succincts pour qu'on puisse répondre à cette question d'une manière positive; il y a cependant une circonstance sur laquelle je crois devoir appeler l'attention des érudits, même pour le cas où quelque ancien ouvrage ne me serait pas assez connu. Je ne trouve pas qu'aucun des auteurs des deux derniers siècles ait reproduit les formes si remarquables des aubes de Ramelli et de Faust Veranzio. Il est même facile de voir qu'ils préfèrent tous l'emploi du choc proprement dit sur les espèces de cuillers offrant même, en général, des surfaces gauches. Belidor et Borgnis lui-même n'ont point rappelé les deux anciennes dispositions précitées des aubes courbes, dont il y a par conséquent lieu de penser que les auteurs ont eu une idée qui n'était encore généralement comprise ni de leur temps, ni même dans les deux siècles qui les ont suivis, c'est-à-dire jusqu'aux savantes recherches d'Euler et de Borda, dont il est d'ailleurs à remarquer que les aubes courbes avaient des dispositions très-différentes.

Je citerai seulement ici, relativement aux aubes à surfaces gauches, l'ouvrage précité de Bockler, dont j'ai déjà mentionné les *Pl. XLIV* et *L*. On voit, sur ces deux planches, l'eau arriver latéra-

lement d'une manière telle, qu'il semble difficile que l'auteur n'ait pas eu une idée quelconque de l'avantage indiqué dans le siècle suivant par Deparcieux, consistant à utiliser en partie l'ascension de l'eau le long des aubes d'une roue hydraulique. Cet ouvrage est d'ailleurs le seul jusqu'à présent où j'aie retrouvé quelque chose d'analogue à la disposition de la turbine précitée de Ramelli, quant à la forme. Mais il y a au fond une différence très-curieuse qui change tout à fait l'état de la question. Le fluide, au lieu d'arriver par la circonférence extérieure pour sortir par le centre, arrive en entier par-dessous, les aubes courbes étant attachées à un plan supérieur plein auquel elles sont perpendiculaires. Le fluide, après avoir produit son action, sort, dans ce système, par la circonférence extérieure de la roue. Le dessin de cette roue se trouve dans la *Pl. LXXXI*, qui représente une turbine éolique ayant pour moteur un courant d'air chaud. Si ce système se rapporte à l'histoire de turbines différentes de celles dont j'ai parlé ci-dessus, il ne détruit pas la conséquence que je viens d'indiquer comme résultant du silence des auteurs des deux derniers siècles sur les dispositions remarquables des aubes de Ramelli et de Faust Veranzio.

Principe d'une nouvelle roue hydraulique élévatoire.

L'ouvrage précité de Bockler renferme plusieurs roues élévatoires à augets invariablement attachés à ces roues; mais on en trouve un perfectionnement remarquable dans le *Theatrum machinarum*, de Leupold, publié longtemps après, le tome Ier de ce dernier étant de 1723. On y trouve le dessin d'une roue élévatoire dont les augets prennent l'eau à élever par la circonférence extérieure et la versent au sommet par la circonférence intérieure. La forme générale du système est d'ailleurs analogue, sauf quelques détails qui s'expliquent par la différence des problèmes à résoudre, avec la roue verticale motrice à augets, proposée par de Thiville, qui a eu l'heureuse idée de recevoir dans certains cas l'eau motrice à l'intérieur, et de la faire sortir par la circonférence extérieure, de manière à permettre aux augets convenablement disposés pour cet objet de garder l'eau le plus longtemps possible avant de la verser au bief d'aval.

Il est permis de s'étonner qu'on ait été si longtemps à transformer cette roue élévatoire, décrite par Leupold, en roue hydraulique motrice, puisqu'il semble qu'il ne s'agissait guère que de changer le sens de son mouvement. Mais ces généralisations, conséquences de l'esprit moderne dont j'ai donné divers exemples à la Société Philomathique de Paris, ne diminuent pas au fond le mérite des anciens auteurs, et même de Thiville ne doit probablement que bien peu de chose à Leupold.

J'ai eu moi-même occasion de communiquer à la Société Philomathique de Paris, en 1846, le principe d'une roue verticale élévatoire à aubes courbes dont il me paraît intéressant de conserver la trace, quoique l'expérience seule puisse montrer quel peut être son degré d'utilité. Ce sera d'ailleurs un exemple de plus des avantages que l'on peut retirer de la lecture des anciens auteurs, même quand ces derniers ont présenté des combinaisons dont le défaut est aujourd'hui reconnu.

Ramelli a disposé verticalement la roue horizontale à aubes courbes dont j'ai parlé ci-dessus. Mais le nombre de ces aubes est alors évidemment trop petit; au reste, ce savant ingénieur voulait peut-être seulement exposer une idée. Il est bien à remarquer qu'il n'a point considéré cette roue verticale comme motrice, mais seulement comme un *propulseur* pour faire avancer des bateaux. Il semble, d'après cette disposition, qu'il voulait faire pénétrer chaque aube dans l'eau en diminuant le choc à son entrée, et qu'il comptait, en partie du moins, sur le poids de l'eau qui aurait été soulevée comme point d'appui pour faire avancer les bateaux. Ce n'est pas ainsi, comme on le sait, que ces propulseurs sont aujourd'hui considérés. Mais quand j'ai eu connaissance de cette ancienne roue, j'ai signalé l'avantage que pourrait avoir une forme analogue des aubes plongeantes pour élever de l'eau au moyen des roues de côté à aubes emboîtées dans un coursier.

J'ai cru depuis retrouver cette idée dans un grand ouvrage sur les moulins à vent hollandais, qui est à la bibliothèque du Conservatoire des Arts et Métiers et qui a été publié, en 1734, in-folio. Je m'étais même empressé de le dire dans ma Note précitée de 1863, mais j'ai reconnu ensuite que je m'étais trompé à mon désavantage, n'ayant pas encore étudié le hollandais. Il est certain que la roue dont il s'agit

est destinée à utiliser une chute d'eau. Mais ce n'est qu'une espèce particulière de roue de côté *motrice*, et la courbure des aubes n'est pas disposée de manière à utiliser la force vive de l'eau, comme dans la roue verticale à aubes courbes de M. le général Poncelet, où l'eau arrive par-dessous, le coursier ayant une direction de bas en haut, ce qui est précisément favorable à l'établissement de la nouvelle turbine à lames liquides oscillantes.

C'est peut-être un des exemples les plus convenables pour montrer qu'en supposant même que les anciens auteurs eussent disposé les aubes des roues de toutes les manières possibles, ce ne serait pas une raison pour en conclure qu'ils se soient doutés du parti qu'on en pouvait tirer pour le bon emploi de la force vive.

Il n'est pas sans intérêt de joindre, à ce que j'ai dit sur les roues hydrauliques à pression, quelques études sur les anciennes roues de ce genre telles qu'elles ont été décrites, en 1777, par Ducrest, quoiqu'elles ne fussent pas à lames oscillantes comme celles que j'ai imaginées.

Il faut, en effet, distinguer de la forme de ce genre de roues celles où le coursier est annulaire. Le fond circulaire de la roue décrite par Ducrest ne paraît pas sans utilité pour simplifier les phénomènes du dégagement de l'eau, sa présence pouvant empêcher les tourbillons de se former en arrière et tendant à reporter mieux en avant la force vive restant à l'eau et qui, en définitive, doit faire dégager celle-ci du côté d'aval.

Ce fond circulaire paraît en général avoir encore un autre avantage: la pression latérale de l'eau du bief supérieur dont la surface est libre, et dans lequel les aubes inclinées plongent directement pour venir s'emboîter dans un coursier qui, avec le fond circulaire de la roue, forme comme un véritable corps de pompe, coulant toujours plein d'eau et évasé par le sommet, se décomposera en deux parties, dont une tendra à soulager la roue et l'autre à la presser latéralement.

Or, je trouve qu'en général la première sera plus grande que la seconde, et qu'il y aura à peu près compensation dans les circonstances extrêmes où le niveau d'amont sera très-élevé, même abstrac-

tion faite de ce que l'eau, montant aussi dans le bief d'aval, pendant les crues, plus haut, comme on sait, qu'elle ne s'élève dans le bief d'amont au-dessus de sa hauteur ordinaire, la roue pourrait tendre à être soulagée, si elle était disposée comme une sorte de flotteur.

Pour fixer les idées, il suffit de dire que, s'il n'y a pas d'eau en aval au-dessus du fond circulaire et si l'eau s'élève en amont à la hauteur de l'axe, la pression qui *soulage* est à celle qui doit augmenter le frottement comme π, rapport de la circonférence au diamètre, est à 2. Il faudrait que l'eau s'élevât jusqu'au sommet de la roue en amont pour que le rapport de ces pressions fût $\frac{\pi}{4}$, en supposant, pour abréger, le coursier très-court et les aubes très-courtes dans ces deux calculs.

Cette roue pourrait fonctionner en partie par aspiration, ce qui permettrait de diminuer soit le nombre des aubes, soit la longueur du coursier en aval de l'axe. Il suffit de voir les *fig.* 5 et 6 de l'ouvrage précité de Ducrest, pour comprendre que si la roue a des joues ou couronnes latérales, elle peut agir par succion sur une hauteur analogue à celle de ces couronnes, l'air extérieur ne pouvant arriver que par-dessous.

Mais il est intéressant de remarquer qu'elle pourra agir en vertu de ce principe sur une hauteur plus grande, puisqu'elle peut tourner avec une certaine vitesse, et qu'en supposant que des bulles d'air pussent s'introduire par-dessous, du côté même où l'eau tend à s'échapper, il faudrait encore un certain temps pour qu'elles arrivassent au sommet de l'espace hydrophore, à cause des phénomènes de la résistance des fluides. Or, pendant cette ascension de l'air, l'aube aura un certain temps pour se dégager, en chassant d'ailleurs devant elle l'ensemble du système fluide compris dans cet espace hydrophore.

Les choses ne se passeraient pas ainsi dans le cas où l'air pourrait arriver par-dessus au lieu de venir par-dessous. On conçoit donc qu'il faudrait alors certaines précautions pour obvier à cet inconvénient à l'époque de l'immersion de l'aube dans l'eau du bief supérieur, surtout si la roue portait des couronnes latérales.

Les effets de la succion permettant de diminuer la longueur du coursier en aval de l'axe, il en résulte que la tangente selon laquelle l'eau se dégagera dans le bief d'aval aux époques où il y aura peu d'eau

dans ce bief sera moins inclinée. Cette circonstance favorisera l'emploi de la force vive de l'eau dégagée en aval, parce que cela permettra de rapprocher plus ou moins dans certains cas les phénomènes de ceux qui ont été depuis longtemps observés à la sortie de l'eau des roues de côté, et sur lesquelles d'ailleurs M. Belanger a fait des recherches intéressantes dont une partie seulement est publiée.

Il n'est peut-être pas sans intérêt d'ajouter, à ce que j'ai dit sur l'histoire des roues de côté coulant à plein coursier, quelques mots relativement à celle des chapelets moteurs coulant à plein tuyau. Mais ce qu'il y a d'intéressant à ajouter ici sur ce sujet se rapporte plutôt aux chapelets élévatoires. L'idée de diminuer le nombre des aubes ou pistons d'un chapelet est décrite, par Tyer, dans le *Repertory of Arts*, t. XXXVI, p. 8 (patente du 2 mai 1818, avec une planche). Quant à celle de donner aux aubes ou pistons une *poupe* et une *proue*, elle est dessinée, pour les chapelets, dans divers auteurs des trois derniers siècles, tels que Ramelli, Wolf, etc., où l'on trouve aussi des ellipsoïdes de révolution en cuir. Il est intéressant de voir une seule aube engagée dans le tuyau ou corps de pompe et n'ayant toujours à surmonter qu'une résistance théoriquement constante, puisque, si la partie de la colonne qui résiste par succion augmente, la partie de la colonne à pousser par-dessous diminue.

Ce genre de moteur a entre autres inconvénients celui de perdre de l'eau par le pourtour entier de la palette ou d'avoir à vaincre le frottement nécessaire pour s'y opposer, tandis que dans les roues de côté coulant à plein coursier, comme celles qui sont décrites par Ducrest et par l'*Encyclopédie méthodique*, cette cause de perte de travail est bien moindre par suite de la manière dont les aubes sont attachées.

MÉMOIRE

Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue *pour la translation ultérieure;*

Et généralement sur le mouvement longitudinal d'un système de deux ou plusieurs prismes élastiques;

Par M. DE SAINT-VENANT.

Lu à l'Académie des Sciences le 24 décembre 1866.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSÉ. — CHOC DE DEUX BARRES DE MÊME MATIÈRE ET DE MÊME SECTION.

1. *Exposé et principaux résultats.* — Coriolis, en étudiant soigneusement le phénomène du choc, avait fait, dès longtemps avant sa publication de 1829 [*], cette simple et judicieuse remarque, qu'à la fin de celui de deux corps parfaitement élastiques, la somme des forces vives, évaluées en attribuant à ces corps les vitesses de leurs centres de gravité respectifs, ne pouvait être égale à la somme des forces vives possédées avant le choc, que si ces mêmes corps restaient après leur séparation *sans mouvement vibratoire* comme sans compression; que, par conséquent, quelque entière que fût leur élasticité, et contrairement à ce qui est ordinairement enseigné, il y avait généralement des *pertes*, même considérables, de force vive utile ou translatoire; idée que Binet avait eue de son côté en considérant seulement le son que toute collision fait entendre.

[*] *Du calcul de l'effet des machines*, n° 66, ou *Rapport* de Navier sur cet ouvrage, p. 4.

Cauchy ayant été prié par Coriolis de calculer la force vive ainsi perdue pour le mouvement de translation ultérieur des corps qui se sont heurtés, répondit à cet appel par une Note de deux pages déposée à l'Académie le 19 février 1827, et aussitôt imprimée [*]. Il y considère le choc longitudinal de deux tiges ou barres cylindriques ou prismatiques de même matière et de même grosseur, supposée petite, qui se heurtent avec des vitesses opposées et réciproques aux longueurs (cas auquel les autres peuvent se ramener); et, sans indiquer ses procédés de recherche, il donne le détail de ce qui doit se passer depuis l'instant de la rencontre des deux barres jusqu'à celui où l'ébranlement, ayant parcouru aller et retour la plus courte des deux, arrive à lui donner partout une vitesse égale à celle que possédait primitivement la plus longue; et comme celle-ci, au point de contact, a une vitesse alors plus grande et tendant à la séparation, il conclut que le choc est alors terminé. Ses autres conclusions, relatives à la perte de force vive, sont : 1° qu'elle n'est zéro que lorsque les deux barres ont la même longueur; 2° que cette perte s'élève *aux trois quarts* de la somme des forces vives primitives quand l'une des deux barres est double de l'autre; 3° qu'elle serait de moitié seulement (continue-t-il) si l'une des deux barres était infiniment plus longue que l'autre.

Coriolis cite les deux premières de ces conclusions finales de Cauchy, mais non la dernière, que sans doute il soupçonnait d'erreur ou, pour mieux dire, de malentendu quant à la manière de concevoir la force vive résidue (n° 7 ci-après).

Poisson traita peu de temps après, mais non en vue d'évaluation de force vive, le même problème du choc longitudinal de deux barres élastiques, aussi de mêmes grosseur et matière, en donnant une exposition complète de son procédé de solution, qui le conduit à des expressions en séries trigonométriques susceptibles de sommation [**].

Il trouve, comme Cauchy, que lorsque les deux barres d'égale section sont aussi égales en longueur, elles se *séparent* en échangeant

---

[*] *Bulletin des Sciences de la Société Philomathique* pour décembre 1826, p. 180; et plus tard aux *Mémoires de l'Institut*.

[**] *Traité de Mécanique*, 2e édition, 1833; nos 499 à 504.

intégralement leurs vitesses, et le choc *se termine* sans qu'elles conservent ensuite ni un mouvement vibratoire quelconque, ni une *compression* qui en engendrerait un ultérieurement. Mais, pour tout autre cas, il y a désaccord avec Cauchy quant au fait présumé de la *séparation*. Poisson, en effet, donnant une double condition à celle-ci, à savoir que non-seulement la vitesse de la barre qui va devant arrive à surpasser celle de l'autre à leur point de contact, mais encore *que la compression soit nulle* dans *l'une* et dans *l'autre* au même point et au même instant, croit pouvoir conclure que, pour peu que les longueurs de ces deux barres soient inégales, elles ne se sépareront point à l'instant indiqué par Cauchy ni à aucun de ceux qui suivent jusqu'à celui où le temps écoulé est devenu double de ce qu'il faut à l'ébranlement pour parcourir la somme des longueurs des deux barres. Et comme, à ce dernier instant, les formules donnent des vitesses partout égales à ce qu'elles étaient initialement, Poisson en infère que leur choc *recommencera* en quelque sorte pour se reproduire périodiquement, en sorte qu'elles marcheront et vibreront ensemble indéfiniment comme une seule barre.

Comme l'égalité absolue de deux longueurs est physiquement impossible ou n'a qu'une probabilité zéro, il s'ensuivrait que deux barres parfaitement élastiques se comporteraient constamment de la même manière, quant à leurs vitesses de translation, que deux corps sans élasticité. La perte serait de toute la force vive possédée quand les vitesses d'arrivée étaient contraires et en raison inverse des masses; c'est-à-dire qu'alors il y aurait, après le choc, immobilité, sauf les vibrations dont le système resterait animé, et aucun *rebond*.

Il ne faut pas (comme on pourrait être tenté de le faire) chercher la raison de ce désaccord réel ou apparent de Poisson et de Cauchy dans ce que dit Coriolis, sans s'en être probablement bien rendu compte, « que celui-ci a eu égard à la dilatation latérale qui accompagne la compression. » Le fait est que cette dilatation des barres dans le sens transversal n'entre nullement et ne devait point entrer dans les résultats de Cauchy, relatifs au détail de ce qui se passe depuis le choc, ni dans la manière dont il a dû les obtenir; et elle n'a aucun besoin d'être prise en considération dans la détermination des mouvements longitudinaux, pas plus que dans les évaluations des forces vives dues aux mouvements des centres de gravité.

Désirant, depuis longtemps, trouver quelle est la vraie solution de cette intéressante question de mécanique physique, j'ai, par une intégration en termes finis des équations qui la régissent, et par une sommation des séries de Poisson, reconnu tout d'abord que les deux illustres géomètres s'accordaient complétement, comme cela devait être, dans les résultats analytiques relatifs au temps embrassé par Cauchy. Ils ont même tous deux raison, celui-ci lorsqu'il prononce qu'au bout de ce temps *le choc est terminé*, car les deux barres cessent complétement (comme on verra) d'agir l'une sur l'autre, et celui-là lorsqu'il soutient qu'il faut prendre en considération la compression conservée par la seconde, comme pouvant être cause que leurs extrémités restent contiguës; et c'est ce qui a lieu effectivement, car elles marchent ensuite avec la même vitesse, bien que le centre de gravité de la seconde barre prenne l'avance sur celui de l'autre. Mais cette contiguïté des extrémités dure peu, et elles s'éloignent infailliblement l'une de l'autre dès qu'arrive un deuxième instant, celui où l'ébranlement *a parcouru aller et retour la barre la plus longue*.

En effet, et c'est ce que Poisson n'a pas aperçu, si les deux barres sont considérées comme restant unies au delà de ce dernier instant, les formules montrent qu'à l'endroit du contact *leurs compressions deviennent négatives*, en sorte qu'elles exerceraient l'une sur l'autre une *traction*. Or cela est impossible, puisque les deux barres, sans adhérence l'une avec l'autre, peuvent bien se pousser, mais non pas se tirer mutuellement. Aussi elles se quitteront alors. J'ai trouvé, à cette occasion, quelle est en général la vraie condition de séparation de deux barres à un instant quelconque; condition à substituer à celle de Cauchy, d'*excès de vitesse de la barre allant devant*, qui est insuffisante, et à celle que Poisson exige en outre, *de compressions nulles*, qui (même avec la restriction *ou négatives*) est surabondante. Les tranches comprimées tendent à se dilater, comme on verra, avec des vitesses égales aux produits des compressions par les vitesses de propagation du son dans les barres. C'est seulement après qu'on a diminué ou augmenté de ces produits, ou de ces *vitesses de détente*, les vitesses possédées par les tranches à l'endroit du contact, que la comparaison de leurs deux grandeurs peut indiquer, à un instant donné, s'il doit y avoir ou non séparation. Il n'y a donc nullement lieu à ce renouvellement périodique de l'état primitif que Poisson a cru reconnaître, et

qui s'opérerait effectivement si les deux barres étaient soudées de manière à pouvoir agir l'une sur l'autre aussi bien par traction que par pression. Leur choc, lorsqu'elles sont d'égale section et de même matière, a bien l'issue qui a été annoncée par Cauchy.

Mais, d'un autre côté, en ce qui regarde la force vive après le choc, le grand analyste, comme on voit par sa troisième conclusion ci-dessus, prenait pour telle celle qui est due aux vitesses *effectives* des tranches des barres. A ce compte il n'y aurait jamais *aucune perte*, car en ajoutant, comme il convient, à cette force vive *actuelle* celle qui est *en réserve* ou accumulée sous forme de potentiel ou de travail, c'est-à-dire celle que la compression opérée est capable d'engendrer ou de restituer ensuite, on a, à chaque instant, une somme égale à *toute* la force vive primitive. Il faut évaluer autrement la force vive résidue utile, à savoir, et suivant l'idée de Coriolis, en attribuant à tous les points de chaque barre la vitesse de *translation* possédée par cette barre, c'est-à-dire *la vitesse de son centre de gravité*. Tout le reste ne produit qu'un mouvement vibratoire qui, destiné à être dissipé au dehors, pourra bien dans l'avenir, après être devenu atomique, se trouver utilisé comme chaleur dans quelque machine capable de le transformer et de le rendre translatoire, mais qui n'en est pas moins entièrement *perdu* pour la translation prochaine de la barre à laquelle il appartient présentement.

Or, en évaluant la perte de cette manière rationnelle, elle n'est pas seulement de *moitié*, comme dit Cauchy, lorsqu'une des deux barres est considérablement plus longue que l'autre, elle s'élève alors jusqu'à la *totalité* de la force vive imprimée, les vitesses étant toujours supposées, comme il le fait, de sens contraire et en raison inverse des longueurs des deux barres.

Nous allons dans une première Partie (n^{os} **2** à **7**) démontrer ces résultats, et déterminer la suite des vitesses et des compressions en montrant la conformité énoncée des résultats de Poisson et de Cauchy. Nous calculerons même ces deux quantités jusqu'à toute époque, en supposant avec Poisson que les deux barres restent unies ou n'en font qu'une seule; nous attribuerons même d'abord aux vitesses et aux compressions initiales des grandeurs fonctions quelconques de l'abscisse ou de la distance de chaque tranche à une extrémité.

Puis, en supposant une barre composée de deux ou plusieurs parties qui possédaient initialement une *vitesse* et une *compression* uniforme données, nous établirons des formules qui nous mettront à même, plus loin, de calculer, et de figurer clairement par une épure, ce que deviennent deux barres après leur choc, et de bien déterminer si leur séparation se continuera ou si leurs vibrations pourront être causes qu'elles se rejoignent.

Nous prouverons de cette manière, sans aucune espèce d'incertitude, que quand les deux barres sont de même grosseur et de même matière, *la plus courte prend finalement et uniformément*, *en perdant toute compression*, *la vitesse primitive de la plus longue*, ce qui permet de calculer immédiatement la vitesse du centre de gravité de celle-ci, et par suite la perte totale éprouvée par la force vive de translation.

Ce résultat, découvert analytiquement par Cauchy en 1826, a été trouvé aussi dernièrement et démontré d'une manière élémentaire par MM. William Thomson et Tait, dans un ouvrage sous presse [*], ce que j'ai appris, depuis la lecture de mon Mémoire et son insertion par extrait aux *Comptes rendus* et aux *Mondes* [**], par l'envoi qui m'a été fait d'un numéro du journal *The Engineer* [***], où le savant M. Macquorn-Rankine, après avoir cité, dans des termes dont je le remercie, mon travail auquel il attribue une grande importance non moins pratique que scientifique, donne, du premier des principaux résultats analytiques de la seconde Partie, une démonstration élémentaire ingénieuse, qui diffère un peu de celle que je venais d'envoyer à l'impression.

Cette seconde Partie ci-après (nos 8 et suivants) est relative au cas général du choc ou du mouvement simultané de deux barres qui sont de grosseurs et de matières différentes. Je donne une solution en série transcendante qui convient même quand leur forme est celle d'un tronc de pyramide ou de cône, et s'étendrait même à deux fuseaux ou autres

---

[*] Intitulé *A Treatise of Natural Philosophy*, sections 302, 303, 304, 305.

[**] Numéro du 10 janvier 1867, p. 69.

[***] Du 15 février 1867, p. 133.

solides composés de pareils troncs, et une solution en termes finis applicable quand les formes sont prismatiques. Alors, si l'ébranlement ou le son *parcourt leurs deux longueurs dans le même temps*, la perte de force vive est nulle et les vitesses finales sont celles que donnent les formules de la théorie ordinaire, enseignée dans tous les Traités de physique. Lorsque cela n'a point lieu, il y a une perte, et il faut recourir, pour avoir les vitesses, à des formules nouvelles. Le choc des deux barres se termine, si leur matière est la même, lorsque l'ébranlement ou le son qui s'y propage a parcouru aller et retour celle des deux qui est la plus mince ou dont la section transversale a le moins de superficie; et, plus généralement, si leurs matières sont différentes, lorsque le son a ainsi parcouru *celle des deux dont la portion ébranlée ou comprimée à chaque instant a la masse la plus petite*. Quand cette barre est aussi celle des deux que le son met le moins de temps à parcourir dans toute sa longueur, elle se sépare de l'autre sans garder de compression, et l'on a des formules très-simples pour sa vitesse et pour celle du centre de gravité de l'autre barre. Mais lorsque le contraire a lieu, comme le son, à l'instant de la séparation, peut avoir parcouru en deux sens plusieurs fois l'une des deux barres en se réfléchissant à son extrémité libre et en se *réfractant* en quelque sorte pour passer chaque fois dans la plus longue avec une autre vitesse, l'état de compression et de mouvement des deux parties de la première des deux barres, au moment de leur séparation, s'exprime en des termes nécessairement plus composés, où le nombre des doubles réflexions entre en exposant. Toutefois leurs vitesses de translation, après le choc, peuvent être exprimées encore sous une forme assez simple.

Je donne, des formules de ce second cas comme de celles du premier, des démonstrations élémentaires susceptibles d'être introduites dans les cours de physique. Et je démontre à cette occasion, d'une manière très-simple, l'expression connue de la vitesse de propagation du son, due à Newton, ce qui n'a pas été fait à ma connaissance depuis qu'il en a lui-même indiqué une démonstration qu'aucun professeur n'a jugée acceptable et susceptible d'être introduite dans l'enseignement, même en en modifiant les termes.

Une discussion délicate prouve, comme on verra, que l'état vibratoire final des barres ne produit toujours pas de rencontre nouvelle

entre les extrémités qui se sont quittées, en sorte que les formules données pour les deux cas généraux représentent bien les vitesses définitives des centres de gravité après le choc, et permettent de calculer la force vive qui est perdue pour la translation ultérieure.

2. *Détermination, en expressions de forme finie, du mouvement longitudinal d'une barre élastique prismatique et homogène, libre, en partant d'un état initial quelconque.* — Soient :

a la longueur de cette barre;

$\mathfrak{m}$ sa masse par unité de longueur;

k la vitesse de propagation longitudinale du son ou d'un ébranlement à travers sa matière, vitesse qui est égale, comme on sait, à la racine carrée du quotient de son module d'élasticité d'extension ou de contraction par sa densité;

x l'abscisse d'une de ses tranches ou sections transversales, ou sa distance au point où se trouve l'extrémité de gauche dans l'état *naturel* de la barre, ou avant toute compression de ses parties;

$x + u$ la même abscisse au bout du temps t, ou u le déplacement éprouvé par la section ou la tranche infiniment mince;

$j = -\frac{du}{dx}$ et $v = \frac{du}{dt}$ la contraction ou compression, et la vitesse de la même tranche au même instant;

φx, ψx les fonctions de x exprimant les valeurs initiales, ou pour $t = 0$, du déplacement u et de la vitesse v.

L'équation différentielle indéfinie du problème est

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = k^2 \frac{d^2u}{dx^2};$$

et les équations définies, vu qu'il n'y a aucune contraction à des extrémités libres, et en désignant par $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a}$, $(u)_{t=0}$, etc. les valeurs de $\frac{du}{dx}$, u, etc., pour $x = a$, $t = 0$, etc. (*), sont :

---

[*] Cette notation commode est de M. Phillips. Nous emprunterons encore tout à l'heure, sauf un léger changement, les notations telles que $f(\zeta)\binom{a}{0}$ à un Mémoire

(2) Aux limites : $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0,\quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} = 0;$

(3) Initialement $\left\{ \begin{array}{l} (u)_{t=0} = \varphi x, \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = \psi x, \end{array} \right.$

On y satisfait par

$$(4) \qquad u = f(x+kt) + F(x-kt),$$

si f et F sont deux fonctions telles, que

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} f'(kt) + F'(-kt) = 0 \\ f'(a+kt) + F'(a-kt) = 0 \end{array} \right\} \text{ de } t = 0 \text{ à } t = \infty,$$

$$(6) \quad \left. \begin{array}{l} f(x) + F(x) = \varphi x \\ kf'(x) - kF'(x) = \psi x \end{array} \right\} \text{ de } x = 0 \text{ à } x = a.$$

Comme u est simplement somme de ces fonctions f, F, on peut, sans altérer sa grandeur, ajouter une constante quelconque à l'une pourvu qu'on la retranche de l'autre ; d'où il suit que toute constante peut être arbitrairement ajoutée à leur différence f — F, sans qu'il en résulte aucun changement dans la valeur de l'inconnue u.

Il résulte de cette remarque que si l'on veut avoir le déplacement u à un instant quelconque, on peut, analogiquement à ce que Poisson indique d'après d'Alembert et Euler pour obtenir les déplacements transversaux de la *corde vibrante* [*], intégrer les deux membres de la seconde équation de condition (6) multipliée par dx, pour une

---

de 1864 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 25) où le même Savant a appliqué à la *Solution de divers problèmes de Mécanique*, d'une nature délicate, avec le talent qu'on lui connaît et en les généralisant d'une manière remarquable, deux méthodes employées pour la première fois, l'une par Poisson en 1819 (*Sur le mouvement des fluides élastiques et la théorie des instruments à vent*, *Mémoires de l'Institut*, 1817, § 2, nos 18 et 19), l'autre par M. Duhamel en 1843 (*Sur un phénomène relatif à la communication du mouvement vibratoire*, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII, p. 122, formule 17).

[*] *Mécanique*, nos 484, 485.

limite inférieure choisie arbitrairement, zéro par exemple, ce qui, en faisant

$$(7) \qquad \int_0^x \psi x\, dx = \Psi x,$$

et en appelant d'une manière générale, avec Poisson, ζ la variable des fonctions f, F dont il s'agit de déterminer la forme, fournira

$$(8) \qquad f\zeta - F\zeta = \frac{1}{k}\Psi\zeta.$$

On en tire déjà, en combinant avec la première (6),

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} f\zeta &= \frac{1}{2}\varphi\zeta + \frac{1}{2k}\Psi\zeta \\ F\zeta &= \frac{1}{2}\varphi\zeta - \frac{1}{2k}\Psi\zeta \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad \zeta = \text{de } 0 \text{ à } a.$$

On obtiendra ensuite les valeurs des deux mêmes fonctions hors des limites 0, a de leur variable en intégrant depuis $\zeta = 0$ les deux équations de condition (5) multipliées par dt; d'où, eu égard à ce que (8) donne $f(0) - F(0) = 0$, $f(a) - F(a) = \frac{1}{k}\Psi a$, et en écrivant ensuite ζ au lieu de $-kt$ dans la première et de $a + kt$ dans la seconde,

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} &F(\zeta) = f(-\zeta) \quad \text{pour} \quad \zeta = \text{de } 0 \text{ à } -\infty, \\ &f(\zeta) = F(2a - \zeta) + \frac{1}{k}\Psi a \quad \text{pour} \quad \zeta = \text{de } a \text{ à } +\infty. \end{aligned}\right.$$

La première de ces deux nouvelles équations donnera $F\zeta$ pour $\zeta =$ de 0 à $-a$, puisque par (9) on a $f(-\zeta)$ pour $-\zeta$ de 0 à a; et la seconde donnera $f\zeta$ pour $\zeta =$ de a à $2a$, puisque par (9) on a $F(2a - \zeta)$ pour $2a - \zeta =$ de a à 0. Ensuite la première (10) donnera $F\zeta$ pour $\zeta =$ de $-a$ à $-2a$ au moyen de ce que la seconde vient de donner $f(-\zeta)$ pour $-\zeta =$ de a à $2a$; puis la seconde donnera $f\zeta$ pour $\zeta =$ de $2a$ à $3a$ au moyen de ce que la première a donné $F(2a - \zeta)$ pour $2a - \zeta =$ de 0 à $-a$; et la première donnera à son tour $F\zeta$ de $\zeta = -2a$ à $-3a$ puisqu'on vient d'obtenir $f(-\zeta)$ de $-\zeta = 2a$ à $-\zeta = 3a$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

En sorte qu'on aura tout ce qu'il faut pour déterminer les valeurs du déplacement u relatives à tous les points de la barre et à tous les temps t.

Mais, pour notre objet, il est surtout nécessaire de connaître la suite des vitesses et des contractions

$$(11)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{du}{dt} = kf'(x+kt) - k\mathrm{F}'(x-kt), \\ j = -\dfrac{du}{dx} = -f'(x+kt) - \mathrm{F}'(x-kt), \end{cases}$$

qui, une fois connues, fournissent d'ailleurs facilement la suite des déplacements. Il nous suffit, ainsi, de déterminer les dérivées f' et F' des deux fonctions. Nous n'avons donc pas besoin d'intégrer trois des quatre équations de condition (5), (6); elles donnent directement, en différentiant au contraire la troisième,

$$(12)\qquad \left.\begin{cases} f'\zeta = \dfrac{1}{2}\varphi'\zeta + \dfrac{1}{2k}\psi\zeta \\ \mathrm{F}'\zeta = \dfrac{1}{2}\varphi'\zeta - \dfrac{1}{2k}\psi\zeta \end{cases}\right\} \text{ pour } \zeta = \text{ de } 0 \text{ à } a,$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}'\zeta = -f'(-\zeta) & \text{pour } \zeta = \text{ de } 0 \text{ à } -\infty, \\ f'\zeta = -\mathrm{F}'(2a-\zeta) & \text{pour } \zeta = \text{ de } a \text{ à } +\infty. \end{cases}$$

D'où successivement, en opérant comme on a dit tout à l'heure, et en désignant généralement ainsi

$$(14)\qquad \begin{cases} \zeta = {}^{n'}_{n}, \qquad 2a-\zeta = {}^{n'}_{n}, \qquad \zeta = \begin{matrix} n'' \\ n' \\ n \end{matrix}, \ldots, \\ f'\left(\zeta = {}^{n'}_{n}\right),\quad \mathrm{F}'\left(2a-\zeta = {}^{n'}_{n}\right),\quad f'\left(\zeta = \begin{matrix} n'' \\ n' \\ n \end{matrix}\right), \ldots \end{cases}$$

les valeurs de ζ ou de $2a-\zeta, \ldots$ comprises entre deux nombres n, n' ou n', n'', et celles de leurs fonctions f', F', on aura le tableau sui-

vant :

$$(15)\qquad \mathrm{F}'\left(\zeta=\begin{matrix}0\\a\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}\varphi'\zeta-\frac{1}{2k}\psi\zeta,$$

$$f'\left(\zeta=\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}\varphi'\zeta+\frac{1}{2k}\psi\zeta,$$

$$\mathrm{F}'\left(\zeta=\begin{matrix}-a\\0\end{matrix}\right)=-f'\left(-\zeta=\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right)=-\frac{1}{2}\varphi'(-\zeta)-\frac{1}{2k}\psi(-\zeta),$$

$$f'\left(\zeta=\begin{matrix}2a\\a\end{matrix}\right)=-\mathrm{F}'\left(2a-\zeta=\begin{matrix}0\\a\end{matrix}\right)=-\frac{1}{2}\varphi'(2a-\zeta)+\frac{1}{2k}\psi(2a-\zeta),$$

$$\mathrm{F}'\left(\zeta=\begin{matrix}-2a\\-a\end{matrix}\right)=-f'\left(-\zeta=\begin{matrix}2a\\a\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}\varphi'(2a+\zeta)-\frac{1}{2k}\psi(2a+\zeta),$$

$$f'\left(\zeta=\begin{matrix}3a\\2a\end{matrix}\right)=-\mathrm{F}'\left(2a-\zeta=\begin{matrix}-a\\0\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}\varphi'(\zeta-2a)+\frac{1}{2k}\psi(\zeta-2a),$$

$$\mathrm{F}'\left(\zeta=\begin{matrix}-3a\\-2a\end{matrix}\right)=-f'\left(-\zeta=\begin{matrix}3a\\2a\end{matrix}\right)=-\frac{1}{2}\varphi'(-\zeta-2a)-\frac{1}{2k}\psi(-\zeta-2a),$$

$$f'\left(\zeta=\begin{matrix}4a\\3a\end{matrix}\right)=-\mathrm{F}'\left(2a-\zeta=\begin{matrix}-2a\\-a\end{matrix}\right)=-\frac{1}{2}\varphi'(4a-\zeta)+\frac{1}{2k}\psi(4a-\zeta),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

contenu dans ces deux formules, où i représente un nombre entier positif ou nul, et où chaque expression du second membre est relative aux intervalles correspondants des valeurs de ζ dans les premiers :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&f'\left(\zeta=\begin{matrix}(2i+2)a\\(2i+1)a\\2ia\end{matrix}\right)=\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\varphi'\left[(2i+2)a-\zeta=\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right]+\frac{1}{2k}\psi\left[(2i+2)a-\zeta=\begin{matrix}0\\a\end{matrix}\right];\\&\frac{1}{2}\varphi'\left[\zeta-2ia=\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right]+\frac{1}{2k}\psi\left[\zeta-2ia=\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right];\end{aligned}\right.\\
&\mathrm{F}'\left(\zeta=\begin{matrix}-(2i+1)a\\-2ia\\-(2i-1)a\end{matrix}\right)=\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\varphi'\left[-2ia-\zeta=\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right]-\frac{1}{2k}\psi\left[-2ia-\zeta=\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right];\\&\frac{1}{2}\varphi'\left[2ia+\zeta=\begin{matrix}0\\a\end{matrix}\right]-\frac{1}{2k}\psi\left[2ia+\zeta=\begin{matrix}0\\a\end{matrix}\right].\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

La périodicité de ces expressions, encore plus manifestée par les deux formules *promotrices* suivantes, qui sont la conséquence des deux formules (13),

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}&f'\left(\zeta=\begin{matrix}\infty\\2a\end{matrix}\right)=f'(\zeta-2a),\\&\mathrm{F}'\left(\zeta=\begin{matrix}-\infty\\-a\end{matrix}\right)=\mathrm{F}'(\zeta+2a),\end{aligned}\right.$$

permettrait, pour composer les valeurs successives (11) de v et de j, de se servir d'un procédé graphique comme celui qu'indique Poisson (*Mécanique*, n° **486**) d'après Euler (*Académie de Berlin*, 1748) pour avoir les formes successives de la corde vibrante, procédé au moyen duquel Monge avait construit un relief représentant clairement la suite de ces formes [*]. Mais on obtiendra numériquement des valeurs exactes en divisant le temps t ou l'espace kt parcouru par l'ébranlement dans les deux sens, en une suite de parties, dépendant de l'abscisse x du point considéré, et entre les limites desquelles chacun des deux binômes $x + kt$, $x - kt$ se trouve compris dans les intervalles

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{2a}{a}, \quad \frac{3a}{2a}, \ldots, \quad \text{ou} \quad \frac{0}{a}, \quad \frac{-a}{0}, \quad \frac{-2a}{-a}, \ldots$$

assignés à ζ au tableau (15). Ces divisions sont données par le double tableau suivant, où l'on a dû distinguer les points en deçà et les points au delà du milieu de la barre :

[*] J'ai construit moi-même deux de ces reliefs, dont il se trouve des exemplaires en plâtre aux collections de l'École Polytechnique, des Écoles des Ponts et Chaussées et des Mines, du Conservatoire des Arts et Métiers, et de la Faculté de Poitiers. Je les avais faits à l'occasion du modelage d'un relief bien plus compliqué, qui se trouve aux mêmes collections, et qui représente la suite des états d'une barre élastique appuyée aux extrémités et heurtée transversalement au milieu.

(18)

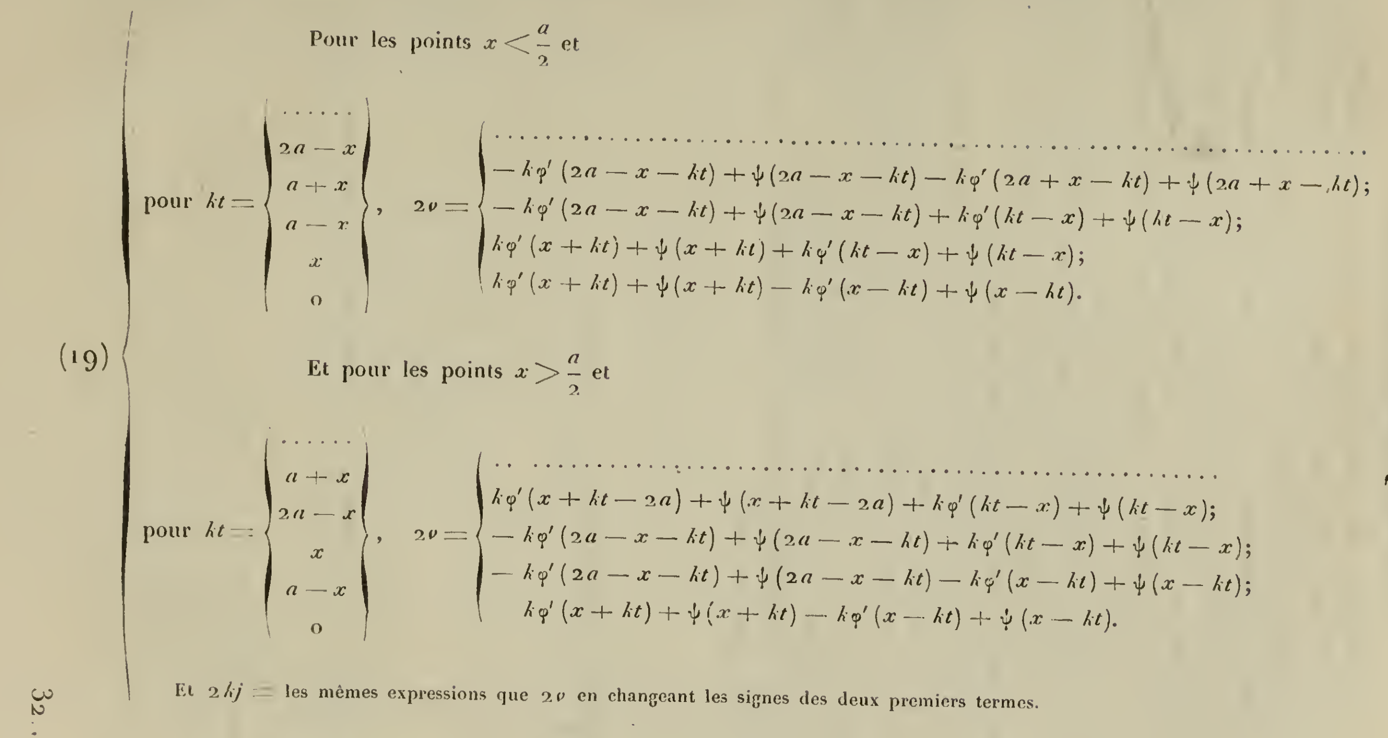
1° Points pour lesquels $x < \frac{a}{2}$.

Lorsque kt varie de........	0	à x	à $a-x$	à $a+x$	à $2a-x$	à $2a+x$	à $3a-x$	à $3a+x$	à $4a-x$	à ...
$x+kt$ varie de........	x	à $2x$	à a	à $a+2x$	à $2a$	à $2a+2x$	à $3a$	à $3a+2x$	à $4a$	à ...
$x+kt$ varie ou *à fortiori* de	0		à a		à $2a$		à $3a$		à $4a$	à ...
$x-kt$ varie de........	x	à 0	à $2x-a$	à $-a$	à $2x-2a$	à $-2a$	à $2x-3a$	à $-3a$	à $2x-4a$	à ...
$x-kt$ varie ou *à fortiori* de	a	à 0		à $-a$		à $-2a$		à $-3a$	à	...

2° Points pour lesquels $x > \frac{a}{2}$.

Lorsque kt varie de........	0	à $a-x$	à x	à $2a-x$	à $a+x$	à $3a-x$	à $2a+x$	à $4a-x$	à $3a+x$	à ...
$x+kt$ varie de........	x	à a	à $2x$	à $2a$	à $a+2x$	à $3a$	à $2a+2x$	à $4a$	à $3a+2x$	à ...
$x+kt$ varie ou *à fortiori* de	0	à a		à $2a$		à $3a$		à $4a$	à	...
$x-kt$ varie de........	x	à $2x-a$	à 0	à $2x-2a$	à $-a$	à $2x-3a$	à $-2a$	à $2x-4a$	à $-3a$	à ...
$x-kt$ varie ou *à fortiori* de	a		à 0		à $-a$		à $-2a$		à $-3a$	à ...

En conséquence on a [expressions (11) de v et de j]:



$$
(19)\left\{
\begin{array}{l}
\text{Pour les points } x < \dfrac{a}{2} \text{ et} \\[2ex]
\text{pour } kt = \left\{\begin{array}{c} \ldots\ldots \\ 2a - x \\ a + x \\ a - x \\ x \\ 0 \end{array}\right\},\quad
2v = \left\{\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-k\varphi'(2a - x - kt) + \psi(2a - x - kt) - k\varphi'(2a + x - kt) + \psi(2a + x - kt); \\
-k\varphi'(2a - x - kt) + \psi(2a - x - kt) + k\varphi'(kt - x) + \psi(kt - x); \\
k\varphi'(x + kt) + \psi(x + kt) + k\varphi'(kt - x) + \psi(kt - x); \\
k\varphi'(x + kt) + \psi(x + kt) - k\varphi'(x - kt) + \psi(x - kt).
\end{array}\right. \\[8ex]
\text{Et pour les points } x > \dfrac{a}{2} \text{ et} \\[2ex]
\text{pour } kt = \left\{\begin{array}{c} \ldots\ldots \\ a + x \\ 2a - x \\ x \\ a - x \\ 0 \end{array}\right\},\quad
2v = \left\{\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k\varphi'(x + kt - 2a) + \psi(x + kt - 2a) + k\varphi'(kt - x) + \psi(kt - x); \\
-k\varphi'(2a - x - kt) + \psi(2a - x - kt) + k\varphi'(kt - x) + \psi(kt - x); \\
-k\varphi'(2a - x - kt) + \psi(2a - x - kt) - k\varphi'(x - kt) + \psi(x - kt); \\
k\varphi'(x + kt) + \psi(x + kt) - k\varphi'(x - kt) + \psi(x - kt).
\end{array}\right. \\[8ex]
\text{Et } 2kj = \text{ les mêmes expressions que } 2v \text{ en changeant les signes des deux premiers termes.}
\end{array}
\right.
$$

Ce qui donnera complétement l'état de la barre en un point quelconque et à des instants quelconques.

3. *Cas particulier où, initialement, deux ou plusieurs portions* a_1, a_2, a_3, ... *de la barre d'une longueur* $a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *ont, en tous leurs points, des vitessses* V_1, V_2, V_3, ... *avec des contractions ou compressions respectives* J_1, J_2, J_3, ... *par unité de longueur.* — Ce cas, dont la solution donne naturellement ce qui arrive dans le choc de deux ou plusieurs barres de même matière et de même section transversale avant qu'elles se séparent, mérite un examen détaillé, parce que la même solution nous servira à connaître sans incertitude ce que deviennent, après une séparation, deux barres quelconques qui se sont heurtées, et à déterminer par conséquent si cette séparation est définitive ou si elle est suivie d'une jonction nouvelle.

Si nous prenons à l'extrémité libre de la première portion a_1 (supposée celle de gauche quand la barre est horizontale ou celle du bas quand elle est verticale) l'origine des x comptées positivement de là à l'extrémité libre de la dernière portion, les vitesses étant comptées positivement aussi dans ce sens, la solution s'obtiendra au moyen des formules (15) du numéro précédent, en scindant, aux limites des portions diverses, les intervalles

$$\frac{0}{a}, \quad \frac{a}{0}, \quad \frac{-a}{0}, \quad \frac{2a}{a}, \quad \frac{-2a}{-a}, \quad \frac{3a}{2a}, \ldots$$

dans lesquels varie ζ, c'est-à-dire en faisant

$$(20) \qquad \varphi'\left(\zeta = \begin{matrix} \cdots\cdots \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{cases} \cdots\cdots \\ -J_3, \\ -J_2, \\ -J_1; \end{cases} \qquad \psi\left(\zeta = \begin{matrix} \cdots\cdots \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{cases} \cdots \\ V_3, \\ V_2, \\ V_1. \end{cases}$$

Il en résultera, en supprimant la désignation ζ devenue inutile :

S'il n'y a que deux parties :

$$(21)' \quad \left\{\begin{aligned}
&2kf'\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_2+V_2, \\ -kJ_1+V_1; \end{cases} &&
2kF'\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1-V_1, \\ -kJ_2-V_2; \end{cases} \\
&2kf'\begin{pmatrix} 2a_1+2a_2 \\ a_1+2a_2 \\ a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_1+V_1, \\ kJ_2+V_2; \end{cases} &&
2kF'\begin{pmatrix} -a_1-a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_2-V_2, \\ kJ_1-V_1; \end{cases} \\
&2kf'\begin{pmatrix} 3a_1+3a_2 \\ 3a_1+2a_2 \\ 2a_1+2a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_2+V_2, \\ -kJ_1+V_1; \end{cases} &&
2kF'\begin{pmatrix} -2a_1-2a_2 \\ -a_1-2a_2 \\ -a_1-a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1-V_1, \\ -kJ_2-V_2; \end{cases} \\
& &&
2kF'\begin{pmatrix} -3a_1-3a_2 \\ -3a_1-2a_2 \\ -2a_1-2a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_2-V_2, \\ kJ_1-V_1. \end{cases}
\end{aligned}\right.$$

S'il y en a trois :

$$(22) \quad \left\{\begin{aligned}
&2kf'\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ a_1+a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_3+V_3, \\ -kJ_2+V_2, \\ -kJ_1+V_1; \end{cases} &&
2kF'\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_1+a_2 \\ a_1+a_2+a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1-V_1, \\ -kJ_2-V_2, \\ -kJ_3-V_3; \end{cases} \\
&2kf'\begin{pmatrix} 2a_1+2a_2+2a_3 \\ a_1+2a_2+2a_3 \\ a_1+a_2+2a_3 \\ a_1+a_2+a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_1+V_1, \\ kJ_2+V_2, \\ kJ_3+V_3; \end{cases} &&
2kF'\begin{pmatrix} -a_1-a_2-a_3 \\ -a_1-a_2 \\ -a_1 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_3-V_3, \\ kJ_2-V_2, \\ kJ_1-V_1; \end{cases} \\
&2kf'\begin{pmatrix} 3a_1+3a_2+3a_3 \\ 3a_1+3a_2+2a_3 \\ 3a_1+2a_2+2a_3 \\ 2a_1+2a_2+2a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_3+V_3, \\ -kJ_2+V_2, \\ -kJ_1+V_1; \end{cases} &&
2kF'\begin{pmatrix} -2a_1-2a_2-2a_3 \\ -a_1-2a_2-2a_3 \\ -a_1-a_2-2a_3 \\ -a_1-a_2-a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1-V_1, \\ -kJ_2-V_2, \\ -kJ_3-V_3. \end{cases}
\end{aligned}\right.$$

Et ainsi de suite.

Bornons-nous d'abord à deux parties a_1, a_2.

On voit que f' ou F' garde une même valeur quand sa variable $\zeta = x \pm kt$ reste entre deux des limites consécutives $\pm i_1 a_1 \pm i_2 a_2$ des intervalles spécifiés, et change de valeur brusquement quand une des limites est franchie. Or, si l'on considère une valeur de t et une valeur de x pour lesquelles la variable $x \pm kt$ est égale justement à une de ces limites, elle lui restera égale quand t croîtra d'une quantité Δt pourvu que x décroisse ou croisse en même temps de $k\Delta t$, c'est-à-dire pourvu que le point déterminé par x recule ou avance, sur la barre, avec une vitesse k.

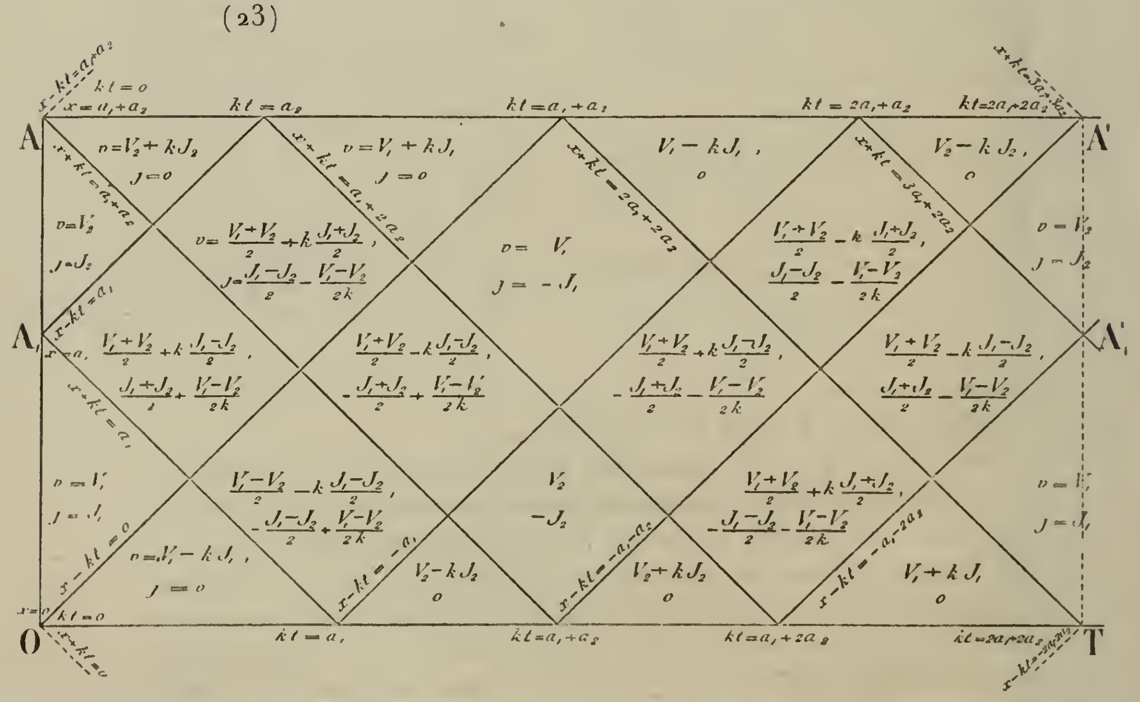
Qu'on imagine donc quatre points mobiles qui, en partant des deux extrémités de la barre, et de la jonction ($x = a_1$) de ses deux parties, la parcourent dans les deux sens avec cette vitesse k et se réfléchissent avec la même vitesse quand ils arrivent aux extrémités; ces points, que nous appellerons *points d'ébranlement*, marqueront les endroits où l'une des deux fonctions $f'(x + kt)$, $F'(x - kt)$, et par conséquent la vitesse v ou la compression j, passe brusquement d'une grandeur à une autre le long de la barre à un instant donné quelconque.

Pour nous reconnaître dans cette complication et déterminer sans méprise la suite des valeurs de v et de j, constantes entre des limites qui varient, figurons la marche des quatre points d'ébranlement en prenant pour abscisses les temps t ou plutôt les produits

$$kt$$

comptés sur une droite OT, et, pour ordonnées, les x comptés paral-

(23)



lèlement à une orthoganale OA_1A dont les portions

$$OA_1 = a_1, \quad A_1A = a_2$$

représentent les deux parties de la barre. Portons, à partir de A et de O, sur une parallèle AA′ à OT, et sur OT elle-même, des longueurs

$$kt = a_2,\quad a_1 + a_2,\quad 2a_1 + a_2,\quad 2a_1 + 2a_2,\ldots$$
$$a_1,\quad a_1 + a_2,\quad a_1 + 2a_2,\quad 2a_1 + 2a_2,\ldots,$$

et joignons leurs extrémités entre elles et avec O, A_1, A, A'_1; les lignes inclinées à 45 degrés ainsi obtenues donneront les traces que laisseraient, sur le plan de la figure, nos quatre points mobiles, si tous les points matériels de la barre OA_1A étaient transportés sur ce plan, dans des directions transversales ou parallèles à OT, avec une vitesse k, égale à celle avec laquelle ces points fictifs se déplacent le long de la barre (en négligeant ici ce qui résulte des petites contractions qu'elle éprouve); et les équations

$$x + kt = a_1,\quad x + kt = a_1 + a_2,\quad x + kt = a_1 + 2a_2,\ldots$$
$$x - kt = a_1,\quad x - kt = 0,\quad x - kt = -a_1,\quad x - kt = -a_1 - a_2,\ldots$$

de ces lignes, que nous y avons écrites, ou les valeurs de x en t qu'on en tire, donneront pour chaque instant la situation de ces mêmes points mobiles sur la barre, ou leur distance x à son extrémité $x = 0$.

Or, un point quelconque de la figure, situé entre deux des lignes qui *descendent* de gauche à droite (prolongées au besoin au dehors) a son x compris entre ceux

$$x = i_1 a_1 + i_2 a_2 - kt,$$

tirés des équations écrites sur ces deux lignes inclinées, en sorte que la valeur de $x + kt$ relative à l'instant et au point matériel qu'il représente est comprise entre les deux valeurs

$$i_1 a_1 + i_2 a_2$$

occupant les seconds membres.

Le même x de ce point particulier de la figure a sa valeur comprise entre celles qu'on tire des équations $x - kt = \ldots$, écrites sur les deux lignes *ascendantes* qui comprennent aussi ce point; la valeur de $x - kt$

qui y répond est donc comprise entre les deux seconds membres correspondants monômes ou polynômes de ces équations.

Ainsi, par exemple, en considérant les points du tableau à l'intérieur du rectangle à gauche, dont un des angles est en A_1, et dont les deux côtés descendants ont pour équations

$$x + kt = a_1, \quad x + kt = a_1 + a_2,$$

et les deux côtés ascendants ont pour équations

$$x - kt = a_1, \quad x - kt = 0,$$

on aura nécessairement, pour tous ces points,

$$x + kt = \frac{a_1 + a_2}{a_1}, \quad x - kt = \frac{0}{a_1},$$

et par conséquent

$$v = kf'\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} - kF'\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix},$$
$$j = -f'\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} - F'\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

De même pour tous les points de la barre et tous les instants se trouvant représentés, ordonnées x et abscisses kt, par les points de l'intérieur du rectangle situé symétriquement au premier, sur la droite du tableau, on aura

$$v = kf'\begin{pmatrix} 3a_1 + 2a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} - kF'\begin{pmatrix} -a_1 - 2a_2 \\ -a_1 - a_2 \end{pmatrix},$$
$$j = -f'\begin{pmatrix} 3a_1 + 2a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} - F'\begin{pmatrix} -a_1 - 2a_2 \\ -a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Substituant à ces f' et F' leurs valeurs en V_1, V_2, J_1, J_2 données par les suites (21), on a pour le premier rectangle, par exemple,

$$v = \frac{-kJ_2 + V_2}{2} - \frac{-kJ_1 - V_1}{2} = \frac{V_1 + V_2}{2} + k\frac{J_1 - J_2}{2},$$
$$j = -\frac{-kJ_2 + V_2}{2k} - \frac{-kJ_1 - V_1}{2k} = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

Si l'on opère de même pour les autres rectangles du tableau, et aussi

pour les triangles de ses bords en se servant, pour ce qui est relatif à quelques-uns, des équations

$$x - kt = a_1 + a_2, \quad x + kt = 0,$$
$$x + kt = 3a_1 + 3a_2, \quad x - kt = -2a_1 - 2a_2$$

des quatre lignes inclinées tracées hors du tableau à partir des coins, on aura les diverses valeurs de v et de j que nous avons écrites dans l'intérieur de tous ces espaces, et qui fournissent les vitesses et les compressions pour tous les points de la barre et pour tous les instants

$$\text{de } t = 0 \quad \text{à } t = \frac{2a_1 + 2a_2}{k}.$$

Cette sorte de diagramme offre la solution complète de la question; car on voit, par ce qui est écrit dans les deux triangles le plus à droite, qu'à ce dernier instant $t = \frac{2a_1 + 2a_2}{k}$ la barre se trouve avoir, sur des longueurs respectivement égales à ses deux parties primitives $OA_1 = a_1$, $A_1A = a_2$, précisément les mêmes vitesses et compressions qu'en commençant, en sorte qu'*elle repassera par les mêmes états, et fera de même à des périodes successives* $\frac{2a_1 + 2a_2}{k}$.

Cette périodicité, au reste, résulte aussi des suites (21) des valeurs de $2kf'\zeta$, $2kF'\zeta$ entre diverses limites de valeurs de ζ, car elles redeviennent les mêmes lorsque $\zeta = x + kt$ augmente de $2a_1 + 2a_2$, et $\zeta = x - kt$ de $-2a_1 - 2a_2$.

Voici un autre tableau ou diagramme relatif au cas de trois parties

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3.$$

Il fera encore mieux comprendre l'opération précédente et sa facilité pour tous les cas, parce qu'on s'est contenté d'écrire l'une au-dessus de l'autre, dans chacune de ses cases, excepté dans les trois triangles à droite, les valeurs constantes de

$$2kf'(x + kt) \quad \text{et} \quad 2kF'(x - kt),$$

qui donnent immédiatement celles de v si l'on retranche la deuxième

de la première en divisant par 2, et celles de j si on les ajoute en changeant les signes et divisant par $2k$. On aurait pu se dispenser

(24)

d'écrire, sur les lignes inclinées, leurs équations en x et t, car pour avoir les $\pm i_1 a_1 \pm i_2 a_2 \pm i_3 a_3$ qui en forment les seconds membres, il suffit de prendre : 1° pour les lignes partant de points de OA, les x de ces points; 2° pour les autres lignes descendantes, les kt des points où elles coupent AA′, augmentés de $a_1 + a_2 + a_3$; 3° pour les autres lignes ascendantes, les kt des points où elles coupent OT, avec le signe $-$.

On y voit très-bien que le f' est le même dans tous les espaces compris entre les deux mêmes lignes descendantes, et le F′ est le même dans tous ceux que comprennent deux lignes montantes consécutives, en sorte que la construction d'un pareil tableau ou diagramme se fera promptement pour quatre parties et plus au besoin.

Ce diagramme, comme le précédent, prouve, par l'inspection des triangles inférieur et supérieur de gauche, qu'une compression J_1 ou J_3 d'une partie extrême engendre, *par détente*, une vitesse addition-

nelle $-kJ_1$ ou $+kJ_3$, dont le signe dépend du sens où les vitesses sont comptées positivement, et qui est égale à cette compression multipliée par la vitesse de propagation du son dans la barre (*voyez* le n° **15**).

4. *Problème du choc longitudinal de deux barres de longueur* a_1, a_2 *parfaitement élastiques, de même matière et de même section, animées primitivement de vitesses uniformes* V_1, V_2 *sans compression initiale.* — En prenant, comme au numéro précédent, le sens de a_1 à a_2 pour celui selon lequel on compte positivement les vitesses, ainsi que les abscisses x, dont l'origine est placée à l'extrémité libre de a_1, il faudra, pour que les deux barres puissent se rencontrer, qu'on ait, *quels que soient les signes de* V_1, V_2,

(25) $$V_1 - V_2 > 0.$$

Supposons aussi que

(26) $$a_1 < a_2,$$

ce qui est toujours permis, car cela revient à prendre pour origine des x et du sens des vitesses regardées comme positives l'*extrémité non heurtée de la plus courte des deux barres.*

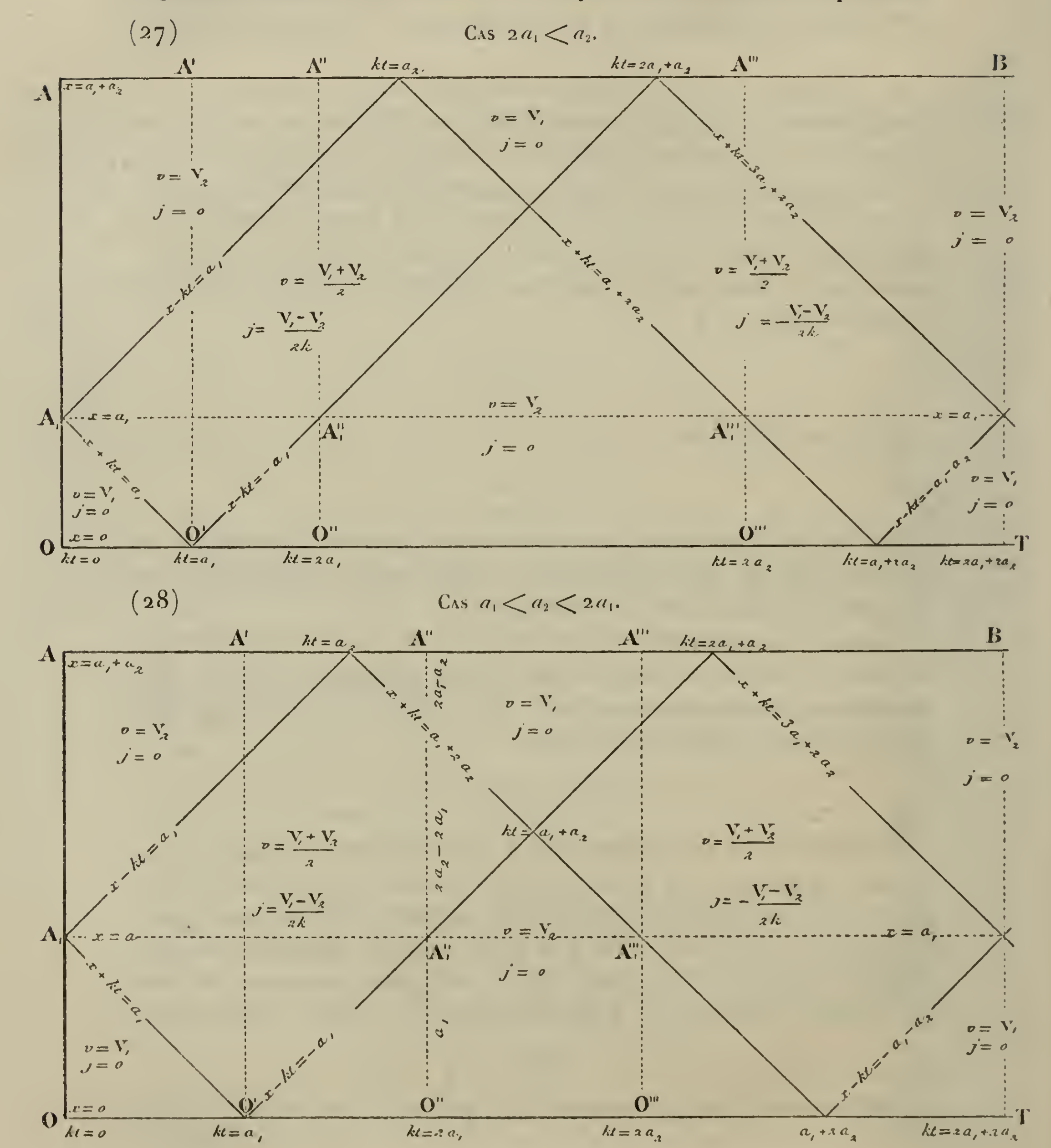
Comme elles resteront quelque temps jointes bout à bout, leur mouvement, au moins en commençant, sera le même que celui de deux portions a_1, a_2 d'une même barre. Il se déterminera en faisant dans les formules du numéro précédent

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0.$$

Cela réduit le diagramme (23) à l'un des deux suivants, où ne figurent plus les quatre lignes inclinées parties de O et de A, puisqu'il n'y a à considérer que les deux points mobiles d'ébranlement partis du point de jonction A_1. On y a tracé, pour la discussion ci-après, dans les positions O′A′, O″A″, O‴A‴, en lignes ponctuées, la barre transportée parallèlement à elle-même avec une vitesse transversale k, aux distances répondant aux temps $t = \frac{a_1}{k}, \frac{2a_1}{k}, \frac{2a_2}{k}$.

On voit par la partie de gauche qu'à partir de l'instant $t = 0$ qui est

celui de la jonction, et de part et d'autre du point $x = a_1$ où elle s'opère, les vitesses initiales V_1, V_2 disparaîtront dans deux portions



(27) Cas $2a_1 < a_2$.

(28) Cas $a_1 < a_2 < 2a_1$.

égales et uniformément croissantes kt des deux barres; et ces portions offriront dans chaque tranche une nouvelle vitesse

$$\frac{V_1 + V_2}{2},$$

avec un degré de compression mesuré par

$$\frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

Mais, après un premier temps

$$t = \frac{a_1}{k},$$

la portion de la seconde barre, qui est la plus longue, continue seule de croître; la portion de la première, qui est venue à en embrasser la totalité, décroît avec la même célérité k, à commencer de son extrémité $x = 0$ ou O′, et elle est remplacée par une portion, de longueur $kt - a_1$, dont les tranches ont la vitesse V_2 possédée initialement par la deuxième barre, et n'ont plus de compression.

En sorte qu'au bout d'un second temps $\frac{a_1}{k}$, ou pour

$$t = 2\frac{a_1}{k},$$

toute la barre a_1 se trouve avoir la vitesse primitive V_2 de la barre a_2 avec une compression nulle partout; tandis que la barre a_2 a encore la vitesse $\frac{V_1 + V_2}{2}$ et la compression $\frac{V_1 - V_2}{2k}$ sur une certaine longueur comptée à partir du point de jonction. Cette longueur est

$2a_1$ si $2a_1 < a_2$, ce qui est le cas du diagramme (27);

et $a_1 - (2a_1 - a_2) = 2a_2 - 2a_1$ si $2a_1 > a_2$, ce qui est le cas du diagramme (28).

Le reste de cette deuxième barre conserve sa vitesse primitive V_2 dans le premier cas et prend, dans le second, celle V_1 que possédait initialement la première barre a_1.

C'est identiquement, et sauf l'hypothèse d'immobilité du centre de gravité commun faite par Cauchy, le détail de ce qu'il annonce avoir trouvé jusqu'à l'instant $t = 2\frac{a_1}{k}$ où il s'arrête.

Avant d'examiner si les deux barres se sépareront, comme il le pense, à cet instant ou à l'un de ceux qui suivent, ou si elles resteront unies comme le pense Poisson, assurons-nous qu'une seconde méthode de calcul, celle que ce dernier Savant a employée, fournit exactement les mêmes résultats.

5. *Solution du même problème en série trigonométrique. Accord avec l'autre.* — Cette solution, donnée par Poisson, du problème du numéro précédent, c'est-à-dire de l'équation

$$(29)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = k^2\frac{d^2u}{dx^2}$$

avec

$$(30)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a_1+a_2} = 0,$$

$$(31)\qquad (u)_{t=0} = 0,$$

$$(32)\qquad (v)_{t=0} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = \begin{cases} V_1 & \text{de } x = 0 \text{ à } x = a_1 \\ V_2 & \text{de } x = a_1 \text{ à } x = a_1 + a_2 \end{cases}$$

est, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et $\sum$ une somme relative à toutes les valeurs du nombre entier positif i de 1 à ∞, donnée par

$$(33)\qquad v = \frac{a_1V_1 + a_2V_2}{a_1+a_2} + 2\frac{V_1 - V_2}{\pi}\sum\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi a_1}{a_1+a_2}\cos\frac{i\pi x}{a_1+a_2}\cos\frac{i\pi kt}{a_1+a_2},$$

$$(34)\qquad j = 2\frac{V_1 - V_2}{\pi k}\sum\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi a_1}{a_1+a_2}\sin\frac{i\pi x}{a_1+a_2}\sin\frac{i\pi kt}{a_1+a_2};$$

formules obtenues en tirant $\frac{du}{dt} = v$ et $-\frac{du}{dx} = j$ de l'expression

$$(35)\quad u = \frac{a_1V_1 + a_2V_2}{a_1+a_2}t + 2\frac{a_1+a_2}{\pi^2}\cdot\frac{V_1 - V_2}{k}\sum\frac{1}{i^2}\sin\frac{i\pi a_1}{a_1+a_2}\cos\frac{i\pi x}{a_1+a_2}\sin\frac{i\pi kt}{a_1+a_2},$$

qui satisfait évidemment aux quatre premières proposées (29), (30), (31); et qui vérifie aussi la dernière, relative aux vitesses initiales : car, si après avoir fait $t = 0$ ou $\cos\frac{i\pi kt}{a_1 + a_2} = 1$ dans l'équation (33) et l'avoir multipliée par $dx \cos\frac{i\pi x}{a_1 + a_2}$, l'on intègre ses deux membres de $x = 0$ à $x = a_1 + a_2$ en mettant, à la place du premier membre v, V_1 pour la partie de l'intégrale de 0 à a_1 et V_2 pour la partie de a_1 à $a_1 + a_2$, le $\sum$ se réduit à un seul terme, savoir celui pour lequel i a la même valeur que dans le multiplicateur introduit, tous les autres termes s'annulant; et il reste

$$V_1 \frac{a_1 + a_2}{i\pi} \sin\frac{i\pi a_1}{a_1 + a_2} + V_2 \frac{a_1 + a_2}{i\pi}\left(- \sin\frac{i\pi a_1}{a_1 + a_2}\right) = 2\frac{V_1 - V_2}{i\pi}\frac{a_1 + a_2}{2} \sin\frac{i\pi a_1}{a_1 + a_2},$$

ou une identité. Le premier des deux termes de l'expression (33) de v disparaît dans cette vérification; mais on en justifie la composition en intégrant de 0 à $a_1 + a_2$ les deux membres multipliés simplement par dx.

Maintenant, pour reconnaître la conformité des résultats de ces deux formules en série (33) et (34) avec ceux du tableau (27) ou (28), sommons les $\sum$ en nous servant, comme Poisson, d'une formule générale

$$(36) \qquad 1 - \theta = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \sin i\pi\theta \quad \text{quand } \theta = \text{ de } 0 \text{ à } 2;$$

qui se construit ou se démontre en posant d'abord

$$1 - \theta = \sum A \sin i\pi\theta,$$

et en déterminant le coefficient inconnu A au moyen d'une intégration, de $\theta = 0$ à $\theta = 2$, des deux membres multipliés par $d\theta \sin i\pi\theta$; car le $\sum$ du second membre se réduit à un seul terme puisque $\int_0^2 d\theta \sin i\pi\theta \sin i'\pi\theta = 0$ lorsque i' est un nombre entier différent

de i; il reste, en tirant A,

$$A = \frac{\int_0^2 d\theta \sin i\pi\theta - \int_0^2 \theta d\theta \sin i\pi\theta}{\int_0^2 d\theta \sin^2 i\pi\theta} = \frac{2}{i\pi}.$$

Pour faire usage de la formule (36) ainsi prouvée, décomposons en sommes de quatre sinus les produits de trois sinus ou cosinus des expressions (33), (34) de v et j, nous avons

$$(37)\quad v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 + x + kt}{a_1 + a_2} + \frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 - x + kt}{a_1 + a_2} \\ + & \frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 + x - kt}{a_1 + a_2} + \frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 - x - kt}{a_1 + a_2} \end{aligned} \right\},$$

$$(38)\quad j = -\frac{V_1 - V_1}{4k}\left(\frac{2}{\pi}\sum - \frac{2}{\pi}\sum - \frac{2}{\pi}\sum + \frac{2}{\pi}\sum\right);$$

les quatre $\sum$ étant respectivement les mêmes dans j que dans v.

Or, 1° lorsque, comme dans le triangle inférieur de gauche des diagrammes (27) et (28), kt varie de o à a_1 et x de o à $a_1 - kt$, ou que

$$x + kt = \genfrac{}{}{0pt}{}{a_1}{0}, \quad x - kt = \genfrac{}{}{0pt}{}{-a_1}{a_1};$$

l'on a

$$a_1 + x + kt = \genfrac{}{}{0pt}{}{2a_1}{a_1}, \quad a_1 - x + kt = \genfrac{}{}{0pt}{}{2a_1}{0},$$

$$a_1 + x - kt = \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{2a_1}, \quad a_1 - x - kt = \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{a_1}.$$

Comme on suppose toujours $a_1 < a_2$, les quotients de ces quatre trinômes par $a_1 + a_2$, ou les quatre fractions qui multiplient $i\pi$ sous les signes sinus des formules (37), (38) donnant v et j sont au-dessus de o et au-dessous de 2, en sorte que la formule de sommation (36) est applicable aux quatre séries $\sum$: et l'on a, vu que la somme de ces quatre fractions est $\frac{4a_1}{a_1 + a_2}$ et que l'excès de la somme de la première

et de la dernière sur la somme des deux autres est zéro,

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4}\left(1 + 1 + 1 + 1 - \frac{4a_1}{a_1 + a_2}\right) = V_1,$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k}(1 - 1 - 1 + 1) = 0.$$

2° Lorsque, comme dans le rectangle de gauche de (27), (28),

$$x + kt = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1}, \quad x - kt = \frac{-a_1}{a_1},$$

l'on a

$$a_1 + x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1}{0},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{0}{2a_1}, \qquad a_1 - x - kt = \frac{-2a_2}{0}.$$

Les quotients par $a_1 + a_2$ des trois premiers trinômes sont entre 0 et 2. Celui du quatrième trinôme est entre 0 et -2; le sinus de son produit par $i\pi$ est le même au signe près que si l'on changeait le signe de ce quotient, et ce changement rend le $\sum$ qui le contient sommable par la formule (36); on aura à retrancher de $1 + 1 + 1 - 1$ toujours la somme des quotients des quatre trinômes par $a_1 + a_2$ *comme si l'on n'avait changé le signe d'aucun d'entre eux*. Donc

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4}\left(1 + 1 + 1 - 1 - \frac{4a_1}{a_1 + a_2}\right) = \frac{V_1 + V_2}{2},$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k}(1 - 1 - 1 - 1) = \frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

3° Triangle supérieur de gauche; $x + kt = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1}$, $x - kt = \frac{a_1 + a_2}{a_1}$, d'où

$$a_1 + x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1}, \quad a_1 - x + kt = \frac{-a_2}{0},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{2a_1 + a_2}{2a_1}, \qquad a_1 - x - kt = \frac{-2a_2}{0}.$$

On peut appliquer la formule (36) de sommation en changeant les

signes du second et du quatrième sinus; et il y a toujours à retrancher *la somme des quatre quotients* comme si l'on n'avait changé aucun signe. Donc

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4}\left(1 - 1 + 1 - 1 - \frac{4a_1}{a_1 + a_2}\right) = V_2,$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k}(1 + 1 - 1 - 1) = 0.$$

En général, quand aucun des quatre sinus ne sera à changer de signe on aura, comme au (1°),

$$v = V_1, \quad j = 0.$$

Quand un sinus sera à changer de signe on aura, comme au (2°),

$$v = \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad j = \frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

Quand deux sinus seront à changer de signe on aura, comme au (3°),

$$v = V_2, \quad j = 0$$

4° Grand triangle inférieur à droite du point $kt = a_1$. On a pour $x + kt = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1}$, $x - kt = \frac{-a_1 - 2a_2}{-a_1}$, les limites suivantes des quatre trinômes

$$a_1 + x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{-2a_2}{0}, \qquad a_1 - x - kt = \frac{-2a_2}{0}.$$

Deux sinus sont à changer de signe; donc

$$v = V_2, \quad j = 0.$$

5° Comme exemple d'un cas où il faut diminuer de $2i\pi$ l'arc d'un des quatre sinus, prenons les points de la barre et les instants figurés par les divers points de l'intérieur du triangle supérieur à droite du point $x = a_2$. On a

$$x + kt = \frac{3a_1 + 2a_2}{a_1 + 2a_2}, \quad x - kt = \frac{-a_1}{a_1};$$

et les limites des quatre trinômes sont :

$$a_1 + x + kt = \frac{4a_1 + 2a_2}{2a_1 + 2a_2}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1}{0},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{0}{2a_1}, \qquad a_1 - x - kt = \frac{-2a_1 - 2a_2}{-2a_2}.$$

En divisant par $a_1 + a_2$, on voit que la première des quatre fractions a ses limites plus grandes que 2, ce qui rendrait la formule de sommation (36) inapplicable. Mais le sinus du produit de cette fraction par $i\pi$ sera le même que si l'on retranchait 2 avant de multiplier par $i\pi$; et, après cette soustraction, on pourra sommer.

Alors la somme des quatre fractions sera

$$\frac{4a_1 - 2(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{4a_1}{a_1 + a_2}.$$

Donc comme le signe du quatrième sinus doit être changé, on aura

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4}\left(1 + 1 + 1 - 1 - \frac{4a_1 - 2a_1 - 2a_2}{a_1 + a_2}\right) = V_1;$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k}\left(1 - 1 - 1 - 1 + \frac{2a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2}\right) = 0.$$

6° Afin de confirmer le résultat négatif $-\frac{V_1 - V_2}{2k}$ que Poisson n'a pas aperçu et qu'on trouve pour la compression j après l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$ de part et d'autre du point de jonction $x = a_1$ des deux barres, faisons

$kt = 2a_2$ et successivement $x = a_1 - \varepsilon$ et $= a_1 + \varepsilon$,

ε étant une longueur infiniment petite.

Les quatre trinômes numérateurs entre accolades de la formule (37) sont

$$2a_1 + 2a_2 \mp \varepsilon, \quad 2a_2 \pm \varepsilon, \quad 2a_1 - 2a_2 \mp \varepsilon, \quad -2a_2 \pm \varepsilon.$$

Avec les signes supérieurs, leurs quotients par le dénominateur $a_1 + a_2$ sont respectivement compris entre 0 et 2, 0 et 2, 0 et -2, 0 et -2;

deux sinus sont à changer de signe comme aux 3°, 4°, 6°, d'où il suit que dans la première barre, immédiatement en deçà du point de jonction, ou

$$\text{pour } kt = 2a_2, \quad x = a_1 - \varepsilon, \quad \text{on a} \quad v = V_2, \quad j = 0.$$

Avec les signes inférieurs, les quotients fournis par les trois derniers trinômes restent entre les mêmes limites, mais celui du premier trinôme est > 2; en en retranchant 2 (comme au 7°), on a

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4}\left(1 + 1 - 1 - 1 - \frac{2a_1 - 2a_2}{a_1 + a_2}\right) = \frac{V_1 + V_2}{2},$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k}\left(1 - 1 + 1 - 1 + \frac{2a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2}\right) = -\frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

7° Comme preuve que le même résultat s'étend à tous les points de la barre et à tous les instants figurés par les divers points de l'intérieur du rectangle de droite, faisons

$$x + kt = \frac{3a_1 + 2a_2}{a_1 + 2a_2}, \quad x - kt = \frac{-a_1 - 2a_2}{-a_1},$$

ce qui donne

$$a_1 + x + kt = \frac{4a_1 + 2a_2}{2a_1 + 2a_2}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{-2a_2}{0}, \qquad a_1 - x - kt = \frac{-2a_1 - 2a_2}{-2a_2}.$$

Les quotients de ces limites par $a_1 + a_2$ sont respectivement entre 2 et 4, 0 et 2, 0 et -2, 0 et -2. On aura donc, comme au deuxième cas du 6°,

$$v = \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad j = -\frac{V_1 - V_2}{2k},$$

conformément à ce qui est écrit dans l'intérieur du rectangle considéré.

8° On vérifierait de même ce qui est relatif aux deux triangles de droite. Mais, plus généralement, pour $t = 2i'\frac{a_1 + a_2}{k}$, i' étant un nombre entier quelconque, la formule (34) donne $j = 0$ et la formule (37)

se réduit à

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 + x}{a_1 + a_2} + \frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 - x}{a_1 + a_2}\right),$$

dont la parenthèse,

$$\text{pour} \quad x = {}^{a_1}_{0} \quad \text{devient} \quad 1 + 1 - \frac{2a_1}{a_1 + a_2}, \quad \text{d'où} \quad v = V_1,$$

$$\text{pour} \quad x = {}^{a_1 + a_2}_{a_1} \quad \text{devient} \quad 1 - 1 - \frac{2a_1}{a_1 + a_2}, \quad \text{d'où} \quad v = V_2,$$

en sorte que la barre revient périodiquement à son état initial.

La solution en série transcendante de Poisson donne, comme cela devait être, tous les résultats analytiques annoncés en 1827 par Cauchy, et, de même, tous ceux que nous avons tirés d'une solution en termes finis et qui sont résumés aux diagrammes du n° 4.

6. *Séparation des deux barres de même section et de même matière qui se sont heurtées.* — A l'instant

$$t = \frac{2a_1}{k}$$

où l'ébranlement, après s'être réfléchi ou avoir fait *écho* (comme dit Poisson) en O ou à l'extrémité libre de la barre la plus courte, est revenu pour la première fois au point $x = a_1$ du choc, on a, d'après les diagrammes (27) et (28) du n° 4,

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Dans toute la première barre } a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & v = V_2, & j = 0. \\ \text{Dans la deuxième } a_2 \text{ sur une longueur } 2a_1 \text{ ou} & & \\ \quad 2a_2 - 2a_1 \text{ à partir du point de jonction} \ldots\ldots & v = \dfrac{V_1 + V_2}{2}, & j = \dfrac{V_1 - V_2}{2k}. \end{array}\right.$$

Quand les deux barres sont égales en longueur, comme le sommet commun des deux rectangles se confond avec A''_1, A'''_1, on voit que la première barre a tout entière la vitesse V_2, et la seconde barre la vitesse V_1 qu'on a dû supposer moindre pour qu'il y eût rencontre. Les deux illustres géomètres cités reconnaissent qu'alors *le choc est*

terminé; les deux barres, qui ont échangé leurs vitesses primitives, se séparent *en ne conservant aucune compression,* et il n'y a pas de perte de force vive translatoire.

Si elles ont des longueurs inégales, comme la vitesse V_2 de la première barre est moindre, au contact, que celle $\frac{V_1+V_2}{2}$ de la deuxième, Cauchy conclut encore qu'elles se séparent et que le choc est terminé, toujours quand $t=\frac{2a_1}{k}$, a_1 étant, avons-nous dit, la plus courte des deux.

Comme on a, au même instant, $j=0$ ou nulle compression dans la première barre a_1, « elle ne change plus de forme, » dit Cauchy, tandis que la seconde a_2, « composée de deux parties dont les vitesses sont différentes et dont une seule offre des compressions nulles, continuera de vibrer dans l'espace, » et, par suite, aura une portion de force vive qui se trouve perdue pour la translation ultérieure.

Mais Poisson n'admet pas alors la séparation des barres, car il exige, pour qu'elle se fasse, « le concours de deux circonstances [*], » savoir : qu'au point de contact, non-seulement la vitesse de celle a_2 qui va devant soit la plus grande, ce qui a bien lieu ici, mais encore *que les compressions soient nulles dans toutes deux*, condition qui n'est remplie qu'à l'égard de la première a_1, puisqu'on a dans la seconde

$$j=\frac{V_1-V_2}{2k}.$$

Et comme les formules trigonométriques (33), (34) de Poisson montrent que les deux circonstances exigées par lui ne se présentent ensemble à aucun instant jusqu'à l'époque

$$t=2\frac{a_1+a_2}{k},$$

où les deux barres inégales reviennent [diagrammes (23), (27) et (28), et fin du n° 5] à l'état où elles étaient à l'instant $t=0$ de leur choc, il conclut que pour peu que leurs longueurs aient d'inégalité,

---

[*] *Mécanique*, 1833, n° 500, p. 234.

leur choc *recommencera* périodiquement, et elles ne pourront pas se séparer [*]; d'où il suivrait que la perte de force vive translatoire, excepté dans le cas physiquement impossible d'une parfaite égalité de longueur, *serait constamment la même que dans le choc de deux corps dépourvus de toute élasticité.*

Cette conclusion singulière n'eût certainement pas été tirée par l'illustre savant s'il avait aperçu une particularité que mettent en lumière les deux diagrammes (27), (28) reproduits ci-dessous (page suivante), à savoir : que passé l'instant

$$t = \frac{a_1 + a_2}{k},$$

il se produit, dans la barre la plus longue a_2, *une compression négative*

$$-\frac{V_1 - V_2}{2k},$$

c'est-à-dire une dilatation, et que cette dilatation, qui en affecte une longueur croissante, atteint son extrémité A_1''' en contact avec la barre a_1, à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k}.$$

Une dilatation a pour effet, non plus une pression, mais une traction; or, deux corps solides distincts et sans adhérence peuvent bien se presser, mais ne se *tirent* jamais l'un l'autre; une traction ne saurait exister à leurs extrémités en contact, pas plus qu'à leurs autres extrémités. La double condition exigée par Poisson, de nullité de pression au point de contact dans les deux barres, et de supériorité de la vitesse de la deuxième barre sur celle de la première au même point, *se trouve donc remplie*, sans qu'il l'ait aperçu, à l'instant

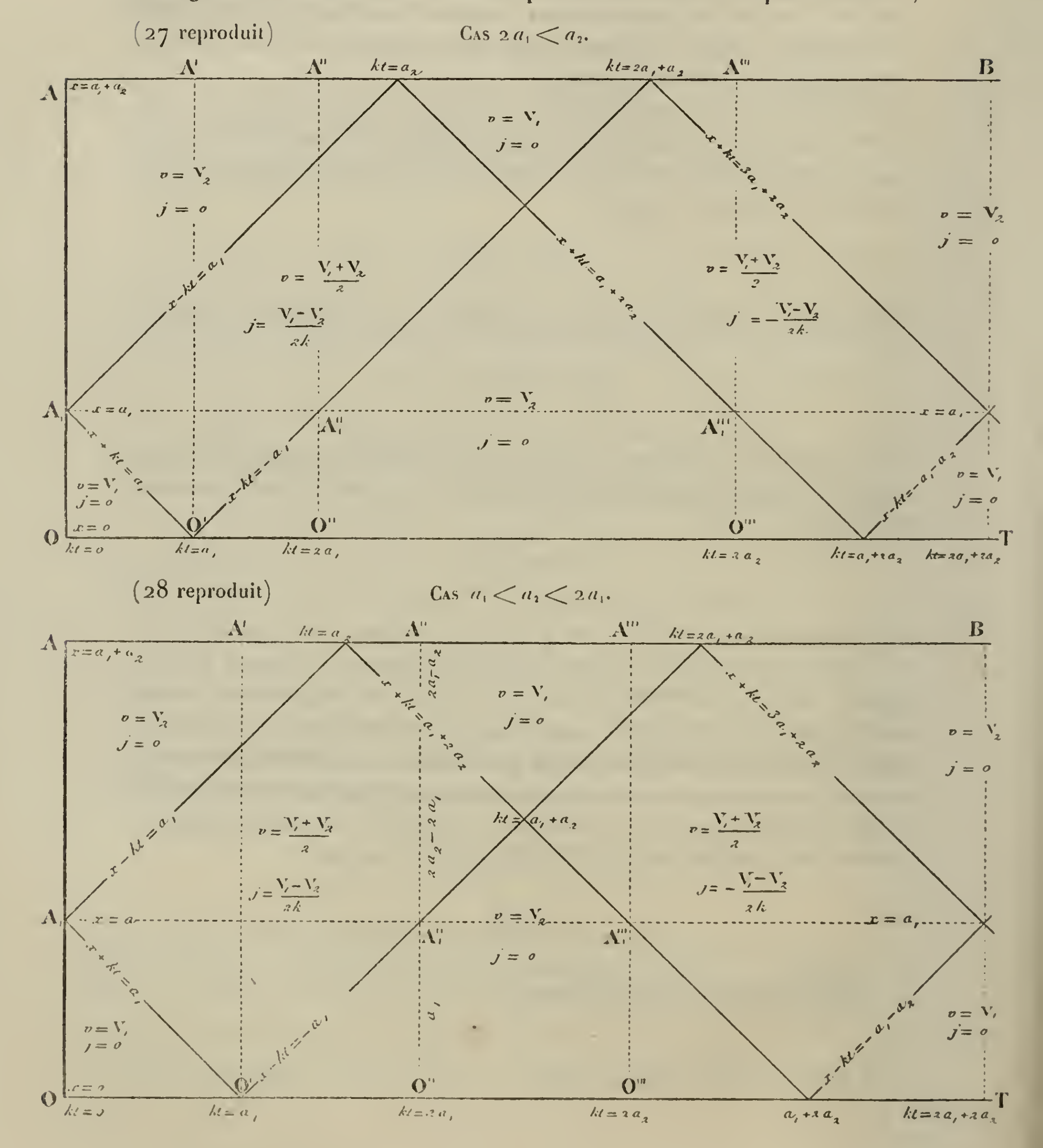
$$t = \frac{2a_2}{k},$$

et elles se sépareront infailliblement.

---

[*] *Mécanique*, 1833, n° 504, p. 341.

La rétraction, sur elle-même, de la deuxième barre qui était dilatée, l'éloignera même aussitôt de la première. Elles ont pu continuer,



depuis l'instant $t = \frac{2a_1}{k}$, de marcher contiguës et juxtaposées, en vertu d'une vitesse commune V_2 (*voir* les diagrammes), quoique sans action mutuelle et déjà tout à fait indépendantes l'une de l'autre. Mais, à l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$, où l'ébranlement a parcouru aller et retour *la plus longue des deux*, leur séparation devient complète.

Reste à savoir, afin d'élucider pleinement cette matière délicate et controversée, si leur séparation sera définitive, ou bien si la marche vibratoire ultérieure de leurs parties ne les portera pas à occuper partiellement plus tard les mêmes points de l'espace, et par conséquent à se rejoindre de manière à produire, avec d'autres vitesses, un nouveau choc.

Pour nous en assurer, nous n'avons qu'à chercher, par les formules du n° 5, ou de son diagramme (23), relatif à une barre *unique* dont deux parties ont eu à un instant donné des vitesses et des compressions ou dilatations uniformes aussi données, ce que les deux barres a_1, a_2 deviennent *isolément* après l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$.

Nous arriverons au même but et nous tirerons d'un seul coup des conclusions plus étendues en appliquant cette méthode à l'état où les barres se trouvent à l'instant $t = \frac{2a_1}{k}$, à partir duquel nous avons vu qu'elles cessaient d'avoir une action quelconque l'une sur l'autre.

Cette application n'a pas besoin d'être faite pour la première barre a_1, qui continuera de se mouvoir sans compression avec la vitesse

$$V_2$$

affectant uniformément toutes ses tranches.

Mais la deuxième barre a_2 se compose, à cet instant $t = \frac{2a_1}{k}$ [*voir* les deux diagrammes (27), (28) reproduits] :

1° Si $2a_1 < a_2$:

D'une partie de longueur	$2a_1$	ayant une vitesse	$\frac{V_1 + V_2}{2}$	et une compression	$\frac{V_1 - V_2}{2k}$;
D'une partie de longueur	$a_2 - 2a_1$	ayant une vitesse	V_2	et une compression	0.

2° Si $a_1 < a_2 < 2a_1$:

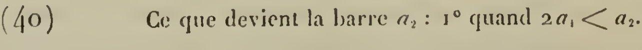
D'une partie de longueur $2a_2 - 2a_1$ ayant une vitesse $\dfrac{V_1 + V_2}{2}$ et une compression $\dfrac{V_1 - V_2}{2k}$;
D'une partie de longueur $2a_1 - a_2$ ayant une vitesse V_1 et une compression 0.

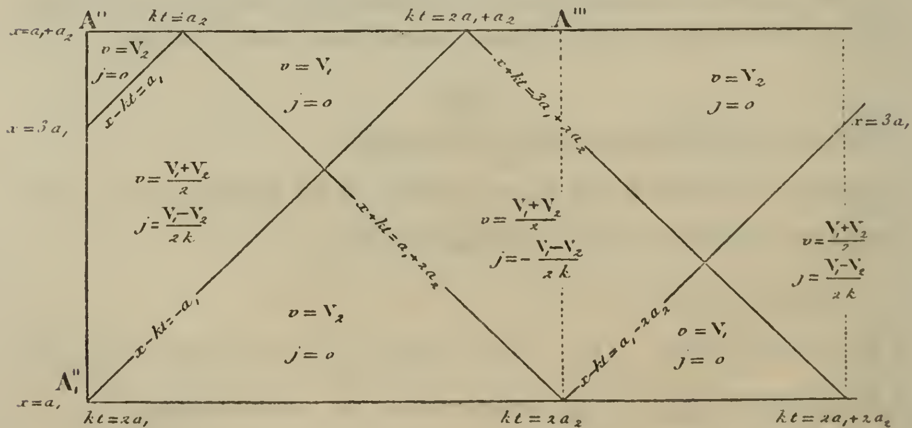
Remplaçons donc successivement, dans le diagramme (23) du n° 5 relatif à une seule barre,

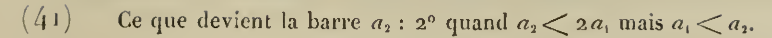
$$(39)\quad \begin{cases} & a_1, \quad a_2, \quad V_1, \quad V_2, \quad J_1, \quad J_2, \quad t, \quad x, \\ 1^\circ \text{ par } & 2a_1, \quad a_2 - 2a_1, \quad \dfrac{V_1 + V_2}{2}, \quad V_2, \quad \dfrac{V_1 - V_2}{2k}, \quad 0, \quad t - \dfrac{2a_1}{k}, \quad x - a_1; \\ 2^\circ \text{ par } & 2a_2 - 2a_1, \quad 2a_1 - a_2, \quad \dfrac{V_1 + V_2}{2}, \quad V_1, \quad \dfrac{V_1 - V_2}{2k}, \quad 0, \quad t - \dfrac{2a_1}{k}, \quad x - a_1; \end{cases}$$

nous aurons les deux suivants, qui ont quelques lignes séparatives de moins, et par conséquent un moindre nombre de formules distinctes.

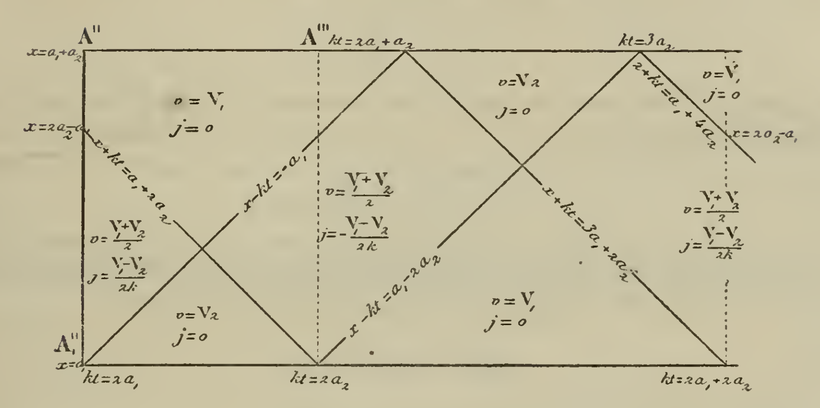
Ces deux diagrammes, comparés aux parties de ceux (27), (28) qui sont relatives à la barre a_2, c'est-à-dire qui se trouvent, après $kt = 2a_1$, au-dessus de la ligne ponctuée $x = a_1$, leur sont semblables (sauf la réflexion en A'''_1), quant aux lignes des ébranlements. Cela devait être, vu que ceux qui affectent les barres, au moment où elles se quittent, continuent leur marche; en sorte qu'on aurait pu se dispenser de calculer par les substitutions (39) relatives à a_1, a_2, t et x, les abscisses des points où ces lignes rencontrent les horizontales $x = a_1$, $x = a_1 + a_2$.


(40) Ce que devient la barre a_2 : 1° quand $2a_1 < a_2$.





(41) Ce que devient la barre a_2 : 2° quand $a_2 < 2a_1$ mais $a_1 < a_2$.



On voit que ces diagrammes sont encore semblables aux parties supérieures de ceux (27), (28), pour les vitesses et les compressions,

$$\text{de} \quad kt = 2a_1 \quad \text{à} \quad kt = 2a_2.$$

Cela montre que l'excès de vitesse de la barre a_2 au contact, pendant un instant indivisible dont l'époque est $t = \frac{2a_1}{k}$, n'a produit qu'une *séparation infiniment petite*, et que les deux barres, se mouvant comme isolées à partir de cet instant $t = \frac{2a_2}{k}$, restent juxtaposées bout à bout en vertu de la vitesse commune V_2, quoique sans action l'une sur l'autre.

Mais, depuis l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$, la deuxième barre a_2 ne se meut plus comme unie à la première a_1, ou comme il est marqué aux diagrammes (27), (28). *Elle perd sa dilatation,* ou sa compression négative $-\frac{V_1 - V_2}{2k}$, sur une longueur qui croît uniformément à partir de son extrémité $x = a_1$ primitivement en contact avec la première barre. Cette extrémité prend en même temps une vitesse V_1, et, en conséquence, *s'éloigne de la barre* a_1 qui en conserve une moindre V_2.

35..

La deuxième barre garde cette vitesse V_1 pendant un temps

$$t = \frac{2a_1}{k},$$

ou jusqu'à l'instant $kt = 2a_1 + 2a_2$, ce qui l'éloigne de la première barre d'une distance

$$\frac{2a_1}{k}(V_1 - V_2).$$

Puis, comme on voit, par la droite des deux nouveaux diagrammes (40), (41), que la deuxième barre a_2 reprend à cet instant

$$kt = 2a_1 + 2a_2$$

les mêmes vitesses et la même compression partielle qu'elle avait à l'instant $kt = 2a_1$, elle repassera par les mêmes états que ces nouveaux diagrammes indiquent, en sorte que les deux barres marcheront à la distance $2a_1\frac{V_1 - V_2}{k}$ avec la même vitesse V_2 toutes deux, pendant le temps

$$\frac{2a_2}{k} - \frac{2a_1}{k};$$

puis elles s'éloigneront de nouveau l'une de l'autre avec une vitesse relative $V_1 - V_2$ pendant un temps

$$\frac{2a_1}{k},$$

et ainsi de suite.

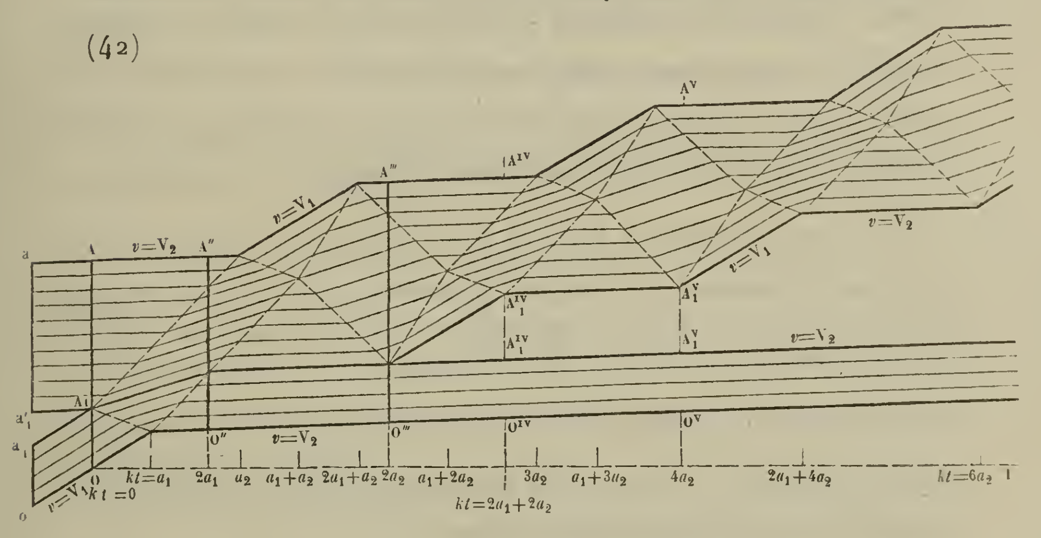
Leurs extrémités heurtées *ne se rejoindront pas*, et le choc, *terminé* de fait *à l'instant* $t = \frac{2a_1}{k}$ fixé par Cauchy, puisqu'elles cessent alors d'agir l'une sur l'autre, *ne recommencera point*.

Nous pouvons maintenant figurer d'une manière complète les états et les mouvements des deux barres a_1, a_2 depuis un instant précédant un peu leur rencontre jusqu'à un certain temps après leur séparation, ou donner l'*épure* détaillée (42) des traces que laisseraient dans l'espace leurs divers points matériels si une vitesse transversale k était

composée à chaque instant avec les vitesses longitudinales réelles que ces points prennent successivement, vitesses que nous avions abstraites, ainsi que les petites contractions et dilatations, en traçant les lignes des diagrammes purement indicatifs ci-dessus.

oa_1, a'_1a figurent, un peu avant leur choc, deux barres qui sont, pour les longueurs, dans le cas $2a_1 < a_2$ des diagrammes (27) et (40). Vu leur transport fictif transversal, OA_1, A_1A donneront leurs situations quand elles se rencontrent, si leurs vitesses d'arrivée V_1, V_2 sont les produits de la vitesse k du son par les tangentes des angles des droites a_1A_1, a'_1A_1 avec l'axe OT des temps, ou des abscisses kt; et

(42)



les distances des points de la figure à cette ligne OT sont celles où, à chaque instant, les divers points des deux barres se trouvent de l'emplacement primitif de l'extrémité libre O de la première si elles se sont mues dans leur direction commune sans ce transport latéral que nous supposons pour figurer sans confusion leurs états successifs.

Les lignes brisées pleines qui se suivent donnent la marche de divers points matériels; leur rapprochement ou leur écartement dans le sens vertical ou perpendiculaire à OT indique, par comparaison avec les distances où sont ces lignes sur OA_1A, les contractions positives ou négatives $\pm \frac{V_1 - V_2}{2k}$ successivement prises, perdues et reprises.

Il n'est pas besoin de dire que nous avons exagéré, pour les rendre sensibles, ces contractions et dilatations, qui sont généralement très-peu considérables ainsi que le rapport de la vitesse $V_1 - V_2$ de l'impulsion à la vitesse k de propagation du son ou des ébranlements dans la barre.

Les lignes ponctuées qui coupent les lignes pleines, et qui forment une suite de parallélogrammes et de triangles, répondant à ceux du diagramme (27) jusqu'à O‴A‴ et ensuite à ceux du diagramme (40), donnent la marche directe et réfléchie des deux *points d'ébranlement* où les vitesses et les contractions changent brusquement de grandeur.

O″A″ représente la situation et l'état des deux barres à l'instant $t = \frac{2a_1}{k}$ où elles cessent d'agir l'une sur l'autre et où leur choc est terminé, mais à partir duquel elles marchent contiguëment pendant le temps $\frac{2a_2 - 2a_1}{k}$ en se mouvant comme séparées.

O‴A‴ donne leur état à l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$ où elles s'éloignent l'une de l'autre, la première continuant à se mouvoir sans contraction avec la vitesse primitive V_2 de la seconde, et celle-ci ayant, sur la plus grande partie de sa longueur, une *dilatation*, ou contraction négative, avec la vitesse $\frac{V_1 + V_2}{2}$ qui devient V_1 à son extrémité inférieure aussitôt après cet instant $t = \frac{2a_2}{k}$, où elle commence à perdre graduellement sa dilatation en bas comme vers le haut.

$O^{IV}A_1^{IV}$, $A_1^{IV}A^{IV}$, $O^{V}A_1^{V}$, $A_1^{V}A^{V}$ sont les barres aux instants $t = \frac{2a_1 + 2a_2}{k}$, $t = \frac{4a_2}{k}$; leur état est le même qu'aux instants $t = \frac{2a_1}{k}$, $t = \frac{2a_2}{k}$. La période de retour, pour la deuxième barre séparée, est $\frac{2a_2}{k}$, et l'on voit qu'en vibrant dans l'espace d'une manière particulière elle s'éloignera de la première de plus en plus.

7. *Conséquences. — Force vive translatoire perdue dans le choc des deux barres élastiques de même grosseur et de même matière. —*

Vitesses de translation après le choc. — A l'instant

$$t = 2\frac{a_1}{k}$$

où le choc est, disons-nous, terminé, et où la première barre a uniformément la vitesse

$$V_2,$$

les deux parties de la seconde barre a_2 ont

$$(43)\quad \begin{cases} \text{si } 2a_1 < a_2, \text{ des longueurs } \quad 2a_1 \quad \text{ et } a_2 - 2a_1 \text{ avec des vitesses } \dfrac{V_1 + V_2}{2} \text{ et } V_2. \\ \text{si } a_2 < 2a_1, \text{ des longueurs } 2a_2 - 2a_1 \text{ et } 2a_1 - a_2 \text{ avec des vitesses } \dfrac{V_1 + V_2}{2} \text{ et } V_1. \end{cases}$$

Il en résulte dans les deux cas, pour le *centre de gravité* de cette seconde barre, la même vitesse

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{2a_1 \dfrac{V_1 + V_2}{2} + (a_2 - 2a_1)V_2}{a_2} = \dfrac{(2a_2 - 2a_1)\dfrac{V_1 + V_2}{2} + (2a_1 - a_2)V_1}{a_2} \\ \qquad = V_2 + \dfrac{a_1}{a_2}(V_1 - V_2); \end{cases}$$

ce qui était nécessaire, en effet, pour la conservation de la somme des quantités de mouvement.

La somme des *puissances vives* (demi-forces vives) [*] dues aux vitesses des centres de gravité après le choc, vu que

$$\mathrm{m}$$

désigne la masse de l'unité de longueur, a ainsi pour grandeur

$$(45)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{m}a_1}{2}V_2^2 + \dfrac{\mathrm{m}a_2}{2}\left[V_2 + \dfrac{a_1}{a_2}(V_1 - V_2)\right]^2 \\ \quad = \dfrac{m}{2}\left[a_1 V_1^2 + a_2 V_2^2 - a_1\left(1 - \dfrac{a_1}{a_2}\right)(V_1 - V_2)^2\right]. \end{cases}$$

[*] Ou si l'on veut, comme les appelle M. Thomson, des *énergies cinétiques*, ou provenant du mouvement *actuel*.

Comme la somme des puissances vives imprimées était

$$(46)\qquad \frac{m}{2}(a_1 V_1^2 + a_2 V_2^2),$$

la *perte* de puissance vive translatoire est

$$(47)\qquad \frac{m a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)(V_1 - V_2)^2.$$

La *proportion* de cette perte, quotient de (47) par (46), est

$$(48)\qquad \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)\frac{\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2}{1 + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}.$$

Si l'on en différentie l'expression par rapport à $\frac{V_2}{V_1}$, on trouve, en égalant à zéro, que le maximum de cette proportion de perte a lieu pour

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{a_1}{a_2}, \quad \text{ou} \quad a_1 V_1 + a_2 V_2 = 0,$$

c'est-à-dire pour le cas, envisagé par Cauchy afin de fixer les idées, où les vitesses du choc sont de sens opposés et réciproques aux longueurs des deux barres, en sorte que le centre de gravité général du système soit immobile.

Et cette proportion maximum de la perte a pour grandeur

$$(49)\qquad 1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Elle est bien des $\frac{3}{4}$ comme il le dit, lorsque $a_2 = 2a_1$ (n° **1**).

Mais on ne voit nullement que cette même perte proportionnelle soit réduite à $\frac{1}{2}$, comme a avancé le même Savant, lorsque la barre a_2 est infiniment plus longue que la barre a_1. On voit au contraire qu'elle est alors égale à

$$1,$$

ou que la perte est de la *totalité* de la puissance vive primitive; ce qui s'explique en considérant qu'alors les deux vitesses des centres de gravité respectifs des barres sont infiniment petites du premier ordre après le choc, d'où il suit que leurs carrés sont infiniment petits du second ordre, et qu'en ajoutant les demi-produits de ces carrés par les deux masses, dont l'une est infinie, l'on a pour la somme des puissances vives un infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire zéro, quelque considérable qu'ait été la vitesse primitive V_1 de la barre de longueur finie a_1. On peut considérer aussi que la séparation définitive des barres, qui n'a lieu, avons-nous vu, qu'à l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$, n'arrivera jamais si la longueur a_2 est infinie.

Si l'on calcule la puissance vive totale due, non plus à des composantes de vitesse prises égales à celles des centres de gravité de chacune des deux parties a_1, a_2, mais aux vitesses réelles ou effectives des diverses tranches immédiatement après le choc, l'on a

$$\text{Quand} \quad 2a_1 < a_2, \qquad \frac{m}{2}\left[a_1 V_2^2 + 2a_1\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)^2 + (a_2 - 2a_1)V_2^2\right],$$

$$\text{Quand} \quad a_1 < a_2 < 2a_1, \quad \frac{m}{2}\left[a_1 V_2^2 + (2a_2 - 2a_1)\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)^2 + (2a_1 - a_2)V_1^2\right];$$

en sorte que la puissance vive réelle, qui était primitivement

$$\frac{m}{2}(a_1 V_1^2 + a_2 V_2^2),$$

se trouverait diminuée par le choc

$$(50) \quad \begin{cases} \text{Dans le cas } 2a_1 < a_2, & \text{de } \dfrac{m}{2} a_1 \dfrac{(V_1 - V_2)^2}{2}, \\ \text{Dans le cas } a_2 < 2a_1, & \text{de } \dfrac{m}{2}(a_2 - a_1)\dfrac{(V_1 - V_2)^2}{2}. \end{cases}$$

Le rapport de cette diminution à la puissance vive primitive est

$$(51)\quad \begin{cases} \text{si } 2a_1 < a_2, & \text{de } \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1-\dfrac{V_2}{V_1}\right)^2}{1+\dfrac{a_2}{a_1}\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)}; \\ \text{si } a_2 < 2a_1, & \text{de } \dfrac{1}{2}\dfrac{a_2}{a_1}\left(1-\dfrac{a_1}{a_2}\right)\dfrac{\left(1-\dfrac{V_2}{V_1}\right)^2}{1+\dfrac{a_2}{a_1}\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^2}. \end{cases}$$

Il a, comme le rapport (48), son maximum pour

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{a_1}{a_2}, \quad \text{ou} \quad a_1 V_1 + a_2 V_2 = 0;$$

et la grandeur de ce maximum est représentée par les deux expressions

$$(52)\quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right) \text{ si } 2a_1 < a_2; \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{2a_1}\left(1-\frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \text{ si } a_2 < 2a_1.$$

La première a pour valeur $\frac{1}{2}$ lorsque a_2 est infiniment plus grand que a_1, et elles ont l'une et l'autre, quand $a_2 = 2a_1$, la valeur $\frac{3}{4}$; ce qui est fortuitement la même chose que ce que donne, dans la même supposition, la formule (49) exprimant la perte proportionnelle autrement entendue.

Ces résultats montrent que Cauchy évaluait la perte par la *diminution*, dont nous venons de donner la formule, de la puissance vive *effective*, ou due aux vitesses individuelles réelles des tranches au moment où le choc est achevé.

Mais, ainsi envisagée, observons que la perte serait même *toujours nulle;* car la diminution en question se retrouve tout entière dans le *potentiel de compression*, c'est-à-dire dans le travail qui a comprimé dans une proportion

$$(53)\qquad j = \frac{V_1 - V_2}{2k}$$

une portion de la seconde barre; travail qu'elle peut restituer et qu'elle restituera effectivement en puissance vive vibratoire.

En effet, si

$$E \text{ et } \omega$$

représentent le module d'élasticité de compression et l'aire de la section de la barre, une compression j exige, pour être maintenue, un effort statique d'une intensité

$$E\omega j;$$

et le travail nécessaire pour la produire sur une longueur quelconque l de la barre est mesuré par l'accourcissement total jl multiplié par $\frac{E\omega j}{2}$, moyenne des intensités des forces qui ont comprimé, depuis l'intensité initiale zéro jusqu'à l'intensité finale $E\omega j$. Or, $\rho = \frac{\mathrm{m}}{\omega}$ étant la densité de la barre, l'on a, comme on sait (*voyez* n° 16),

$$(54) \qquad k^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{E\omega}{\mathrm{m}}.$$

Le travail ou potentiel de compression est donc, d'après la valeur (53) $\frac{V_1 - V_2}{2k}$ de j,

$$jl.\frac{E\omega j}{2} = l.\frac{\mathrm{m}k^2}{2}j^2 = \frac{\mathrm{m}}{2}l.\frac{(V_1 - V_2)^2}{4}.$$

Mettant pour l la longueur comprimée qui est (form. 43) $2a_1$ dans le cas $2a_1 < a_2$, et $2a_2 - 2a_1$ dans le cas $a_2 < 2a_1$, l'on a, pour ce potentiel, précisément les grandeurs (51) des diminutions de puissance vive effective; en sorte que le théorème général de conservation de la puissance vive jointe au potentiel se trouve satisfait, comme on pouvait le prévoir.

Il n'y a ainsi, et cela devait être, *aucune perte* quand on estime, après le choc des barres élastiques, la puissance vive effective en y joignant comme on le doit celle qui est en réserve sous forme de potentiel ou de travail de compression effectuée [*]. Mais une partie de

[*] Ou en joignant, à l'énergie *cinétique* ou *actuelle* (sir W. Thomson), l'énergie *potentielle*.

cette puissance vive tant actuelle que virtuelle est ou sera vibratoire, et se trouve en conséquence destinée à se dissiper dans l'air ou dans les autres corps environnants; on doit la regarder comme *perdue* pour le mouvement de translation, puisqu'elle n'y servira qu'éventuellement et dans un avenir indéterminé après être devenue atomique ou calorifique et avoir été utilisée, comme telle, dans quelque machine à feu pour opérer une translation, mais *d'autres corps* que ceux où présentement elle réside.

La force vive translatoire résidue et la proportion de sa perte doivent donc être estimées, selon l'idée de Coriolis et comme nous avons fait, par les expressions (45), (48) et (49), établies en attribuant à toutes les molécules des corps qui se sont heurtés, les vitesses V_2 et (44) de leurs deux centres de gravité; vitesses qui sont, au reste, encore les mêmes à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k}$$

de la séparation définitive ou de l'éloignement l'une de l'autre des deux extrémités juxtaposées, comme on peut le voir par la symétrie de chacun des deux diagrammes (39), (40) et l'égalité des longueurs de la deuxième barre, animées respectivement des vitesses $\frac{V_1+V_2}{2}$ et V_2 ou V_1 à cet instant et à celui $t=\frac{2a_1}{k}$. On trouve même, entre ces deux instants-là, une vitesse constante pour le centre de gravité de a_2, puisque les deux barres, pendant tout le temps $\frac{2a_2}{k}-\frac{2a_1}{k}$, se meuvent comme isolées ou sans action l'une sur l'autre.

Mais on se fera mieux que par les expressions (47), (48), (49) l'idée des grandeurs diverses de cette perte occasionnée par le choc des deux barres élastiques, en la comparant à la perte qui aurait lieu si ces barres étaient des corps dénués d'élasticité. Cette dernière perte est

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{m}}{2}(a_1V_1^2+a_2V_2^2)-\frac{\mathrm{m}}{2}(a_1+a_2)\left(\frac{a_1V_1+a_2V_2}{a_1+a_2}\right)^2\\
&=\frac{\mathrm{m}}{2}a_1\left(V_1-\frac{a_1V_1+a_2V_2}{a_1+a_2}\right)^2+\frac{\mathrm{m}}{2}a_2\left(\frac{a_1V_1+a_2V_2}{a_1+a_2}-V_2\right)^2,
\end{aligned}$$

ou

$$(55)\qquad \frac{ma_1.ma_2}{ma_1+ma_2}\,\frac{(V_1-V_2)^2}{2}.$$

Le quotient de l'expression (47) $\frac{ma_1}{2}\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)(V_1-V_2)^2$ par celle-ci est

$$(56)\qquad 1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$$

ou précisément égal à la proportion maximum (49) de la perte. Ses valeurs sont :

$$\text{Pour } \frac{a_2}{a_1}=1,\quad \frac{5}{4},\quad \frac{3}{2},\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots,\quad \infty.$$

$$1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=0,\quad \frac{9}{25},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{8}{9},\quad \frac{15}{16},\quad \frac{24}{25},\ldots,\quad 1.$$

Telles sont les grandeurs du rapport de la perte de force vive translatoire dans le choc de deux barres parfaitement élastiques de même matière et de même section, ayant des longueurs a_1, a_2, à celle qui aurait lieu, et qui est connue de tout le monde, si ces barres étaient deux corps dénués d'élasticité ou restant indéfiniment unis après leur rencontre.

Et si l'on appelle, pour la première et pour la seconde barre,

$$(57)\qquad \begin{cases} U_1,\ U_2 \text{ les vitesses de translation après le choc,} \\ M_1=ma_1,\quad M_1=ma_2 \text{ les masses,} \end{cases}$$

on doit prendre, la première ayant alors partout (nº 6) la vitesse primitive V_2 de la seconde, et celle du centre de gravité de la seconde, donnée par l'expression (44), pouvant être tirée également de la condition $M_1U_1+M_2V_2=M_1V_1+M_2V_2$ de conservation de la quantité de mouvement,

$$(58)\qquad \begin{cases} U_1=V_2, \\ U_2=V_2+\frac{a_1}{a_2}(V_1-V_2)=V_2+\frac{M_1}{M_2}(V_1-V_2), \end{cases}$$

au lieu de $U_1 = V_1 - \frac{2M_2}{M_1+M_2}(V_1 - V_2)$, $U_2 = V_2 + \frac{2M_1}{M_1+M_2}(V_1 - V_2)$ qu'on trouve dans tous les ouvrages qui traitent du choc des corps parfaitement élastiques.

Si $V_2 = 0$, ou si la barre la plus longue était immobile avant le choc, on a après le choc,

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{a_1}{a_2} V_1 = \frac{M_1}{M_2} V_1;$$

et si $V_1 = 0$ ou si c'était la barre la plus courte qui se trouvait en repos, il faut prendre

$$U_1 = V_2, \quad U_2 = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) V_2 = \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) V_2.$$

Nous verrons plus loin que les expressions (58), avec $\frac{M_1}{M_2}$ dans la seconde, s'appliquent même pour deux barres de matières et de sections différentes, si les masses où l'ébranlement se propage à chaque instant sont les mêmes pour toutes deux ; et nous en donnerons, à la fin du Mémoire, des démonstrations élémentaires.

DEUXIÈME PARTIE.

CHOC DE DEUX BARRES DONT LES SECTIONS ET LES MATIÈRES SONT DIFFÉRENTES.

8. *Problème du mouvement que prennent deux barres juxtaposées bout à bout lorsqu'elles sont de grosseurs et de matières différentes, en partant d'un état initial quelconque.* — Regardons-les d'abord comme formant deux parties d'une même barre, et appelons respectivement

$$(59) \quad \begin{cases} a_1,\ \omega_1,\ m_1,\ M_1 = m_1 a_1,\ E_1,\ u_1 & \text{pour la première,} \\ a_2,\ \omega_2,\ m_2,\ M_2 = m_2 a_2,\ E_2,\ u_2 & \text{pour la seconde.} \end{cases}$$

1° La longueur; 2° la section transversale; 3° la masse par unité de longueur; 4° la masse totale; 5° le module d'élasticité d'extension et de compression longitudinale; 6° le déplacement longitudinal, au

bout du temps t, d'un point à la distance x de l'extrémité libre (ou de gauche) de la première.

Et faisons

$$(60)\quad \begin{cases} v_1 = \dfrac{du_1}{dt}, & j_1 = -\dfrac{du_1}{dx}, \quad k_1^2 = \dfrac{E_1\,\omega_1}{m_1}, \quad \tau_1 = \dfrac{a_1}{k_1}, \\ v_2 = \dfrac{du_2}{dt}, & j_2 = -\dfrac{du_2}{dx}, \quad k_2^2 = \dfrac{E_2\,\omega_2}{m_2}, \quad \tau_2 = \dfrac{a_2}{k_2}; \end{cases}$$

ou désignons par les lettres v, j, k, τ, 1° la vitesse et 2° la compression au même point et au même instant; 3° la *célérité* de la propagation longitudinale du son ou des ébranlements, et 4° le temps nécessaire pour qu'il parcoure la longueur de chaque partie.

Faisons enfin, pour abréger,

$$(61)\qquad r = \frac{\dfrac{E_2\,\omega_2}{k_2}}{\dfrac{E_1\,\omega_1}{k_1}} = \frac{m_1\,k_1}{m_2\,k_2},$$

c'est-à-dire appelons r le *rapport des masses de portions des deux barres qui s'ébranlent simultanément ou que le son parcourt dans le même temps*.

Et choisissons constamment pour la première des deux barres, appelée a_1, à l'extrémité libre de laquelle nous plaçons l'origine des x, celle qui est parcourue d'un bout à l'autre par l'ébranlement ou le son dans le moins de temps; en sorte que nous supposons toujours

$$(62)\qquad \tau_1 < \tau_2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}.$$

Les équations à résoudre sont, les lettres φ et ψ désignant des fonctions de x qui représentent l'état des barres à l'instant $t = 0$,

$$(63)\qquad \frac{d^2u_1}{dt^2} = k_1^2\,\frac{d^2u_1}{dx^2}, \qquad \frac{d^2u_2}{dt^2} = k_2^2\,\frac{d^2u_2}{dx^2},$$

$$(64)\qquad \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=a_1+a_2} = 0,$$

$$(65)\qquad (u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1}, \quad \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1} = \frac{E_2\,\omega_2}{E_1\,\omega_1}\left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=a_1} = r\,\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=a_1},$$

enfin

(66) $(u_1)_{t=0} = \varphi_1 x, \quad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} = \psi_1 x, \quad (u_2)_{t=0} = \varphi_2 x, \quad \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0} = \psi_2 x;$

conditions initiales qui, dans le cas du choc des deux barres avec les vitesses positives ou négatives V_1, V_2, telles [comme au n° 4 (25)] que

(67) $$V_1 - V_2 > 0$$

se réduisent à

(68) $(u_1)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} = V_1, \quad (u_2)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0} = V_2.$

J'ai donné, dans un autre Mémoire, pour les déplacements tels que u_1, u_2, des expressions en série transcendante, applicables à un nombre quelconque de barres ou parties de barre en partant d'un état quelconque, les extrémités non jointes de la première et de la dernière étant ou libres ou assujetties, et toutes ou quelques-unes pouvant être en tronc de cône ou de pyramide. Les formules spéciales à deux barres prismatiques animées initialement de vitesses uniformes V_1, V_2, sans compression, sont

(69).

$$u_1 = \sum A X_1 \sin mt, \quad \text{si} \quad X_1 = \frac{\cos \frac{m\tau_1 x}{a_1}}{\cos m\tau_1},$$

$$u_2 = \sum A X_2 \sin mt, \quad \text{si} \quad X_2 = \frac{\cos \frac{m\tau_2}{a_2}(a_1 + a_2 - x)}{\cos m\tau_2},$$

$$\text{et si} \quad A = \frac{1}{m} \frac{\frac{M_1}{a_1} V_1 \int_0^{a_1} X_1\,dx + \frac{M_2}{a_2} V_2 \int_{a_1}^{a_1+a_2} X_2\,dx}{\frac{M_1}{a_1} \int_0^{a_1} X_1^2\,dx + \frac{M_2}{a_2} \int_{a_1}^{a_1+a_2} X_2^2\,dx},$$

$\sum$ s'étendant à toutes les racines m réelles et positives, en nombre infini, de l'équation transcendante

$$E_1 \omega_1 \left(\frac{dX_1}{dx}\right)_{x=a_1} = E_2 \omega_2 \left(\frac{dX_2}{dx}\right)_{x=a_1}$$

ou $$m\left(\frac{M_1}{\tau_1} \operatorname{tang} m\tau_1 + \frac{M_2}{\tau_2} \operatorname{tang} m\tau_2\right) = 0,$$

y compris la racine $m = 0$;

ou bien, si l'on exclut cette racine $m = 0$, en faisant passer hors du signe $\sum$ ce qui en provient, et si l'on développe :

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_1V_1+M_2V_2}{M_1+M_2}t + (V_1-V_2)\frac{M_1}{\tau_1}\sum\frac{2}{m^2}\frac{\sin m\tau_1\cos\frac{mx}{k_1}\sin mt}{M_1+M_2\frac{\cos^2 m\tau_1}{\cos^2 m\tau_2}},\\ u_2 &= \frac{M_1V_1+M_2V_2}{M_1+M_2}t - (V_1-V_2)\frac{M_2}{\tau_2}\sum\frac{2}{m^2}\frac{\sin m\tau_2\cos\frac{m(a_1+a_2-x)}{k_2}\sin mt}{M_1\frac{\cos^2 m\tau_2}{\cos^2 m\tau_1}+M_2}, \end{aligned}\right.$$

En effet, les expressions (69) de u_1, u_2 satisfont bien, vu $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$, $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$, aux équations différentielles (63), et, aussi, évidemment à (64), (65), ainsi qu'à la première et à la troisième des conditions initiales (68); et, quant à la seconde et à la quatrième de celles-ci, comme elles reviennent à $\sum mAX_1 = V_1$, $\sum mAX_2 = V_2$, si l'on ajoute ces deux équations multipliées respectivement par $\frac{M_1}{a_1}X_1dx$, $\frac{M_2}{a_2}X_2dx$, et intégrées, aussi respectivement, de 0 à a_1, et de a_1 à a_1+a_2, tous les termes des $\sum$ disparaissent hors un seul et l'on tire bien la valeur (69) de A, vu que si m, m' sont deux racines différentes de l'équation transcendante, et si X_1, X_2 et X'_1, X'_2 sont les valeurs correspondantes respectives des fonctions de x et m appelées X_1, X_2, il est facile de voir que d'après cette même équation on a

$$(71)\qquad \frac{M_1}{a_1}\int_a^{a_1} X_1X'_1dx + \frac{M_2}{a_2}\int_{a_1}^{a_1+a_2} X_2X'_2dx = 0.$$

Si les deux barres qui se heurtent sont en forme de tronc de cône ou de pyramide, il est bon, pour avoir des expressions symétriques, de compter les abscisses x_1, x_2 de leurs sections variables Ω_1, Ω_2 dans deux sens opposés à partir de leurs extrémités libres respectives, en sorte qu'on aura pour les superficies de ces sections

$$\Omega_1 = \omega_1\left(1+\frac{x_1}{h_1}\right),\quad \Omega_2 = \omega_2\left(1+\frac{x_2}{h_2}\right)^2,$$

ω_1, ω_2 étant celles des sections extrêmes, et h_1, h_2 des constantes linéaires positives ou négatives. Alors, si $\frac{\Pi_1}{g}$, $\frac{\Pi_2}{g}$ représentent les densités des deux barres, et si l'on fait

$$\frac{g\mathrm{E}_1}{\Pi_1} = k_1^2, \quad \frac{g\mathrm{E}_2}{\Pi_2} = k_2^2,$$

comme les équations différentielles (63) sont alors remplacées par

$$\frac{d\left(\mathrm{E}_1\Omega_1\frac{du_1}{dx_1}\right)}{dx_1} = \frac{\Pi_1\Omega_1}{g}\frac{d^2u_1}{dt^2}, \quad \frac{d\left(\mathrm{E}_2\Omega_2\frac{du_2}{dx_2}\right)}{dx_2}\frac{\Pi_2\Omega_2}{g} = \frac{d^2u_2}{dt^2},$$

et les équations définies (64), (65), (68), par

$$\left(\frac{du_1}{dx_1}\right)_{x_1=0} = 0, \quad \left(\frac{du_2}{dx_2}\right)_{x_1=0} = 0, \quad (u_1)_{x_1=a_1} = -(u_2)_{x_2=a_2},$$

$$\mathrm{E}_1\omega_1\left(1+\frac{a_1}{h_1}\right)^2\left(\frac{du_1}{dx_1}\right)_{x_1=a_1} = \mathrm{E}_2\omega_2\left(1+\frac{a_2}{h_2}\right)^2\left(\frac{du_2}{dx_2}\right)_{x_2=a_2},$$

$$(u_1)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} = \mathrm{V}_1, \quad (u_2)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0} = -\mathrm{V}_2,$$

l'on aura pour solution

$$u_1 = \sum \mathrm{A}\mathrm{X}_1 \sin mt, \quad u_2 = \sum \mathrm{A}\mathrm{X}_2 \sin mt,$$

$$\text{si}\quad \mathrm{X}_1 = \frac{1+\frac{a_1}{h_1}}{1+\frac{x_1}{a_1}}\;\frac{\cos\frac{mx_1}{k_1}+\frac{k_1}{mh_1}\sin\frac{mx_1}{k_1}}{\cos\frac{ma_1}{k_1}+\frac{k_1}{mh_1}\sin\frac{ma_1}{k_1}}, \quad \mathrm{X}_2 = \frac{1+\frac{a_2}{h_2}}{1+\frac{x_2}{h_2}}\;\frac{\cos\frac{mx_2}{k_2}+\frac{k_2}{mh_2}\sin\frac{mx_2}{k_2}}{\cos\frac{ma_2}{k_2}+\frac{k_2}{mh_2}\sin\frac{ma_2}{k_2}},$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{m}\,\frac{\Pi_1\omega_1\mathrm{V}_1\int_0^{a_1}\left(1+\frac{x_1}{h_1}\right)^2\mathrm{X}_1\,dx_1 + \Pi_2\omega_2\mathrm{V}_2\int_0^{a_2}\left(1+\frac{x_2}{h_2}\right)^2\mathrm{X}_2\,dx_2}{\Pi_1\omega_1\int_0^{a_1}\left(1+\frac{x_1}{h_1}\right)^2\mathrm{X}_1^2\,dx_1 + \Pi_2\omega_2\int_0^{a_2}\left(1+\frac{x_2}{h_2}\right)^2\mathrm{X}_2^2\,dx_2},$$

$\sum$ s'étendant à toutes les racines de l'équation transcendante

$$\mathrm{E}_1\omega_1\left(1+\frac{a_1}{h_1}\right)^2\left(\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_1}\right)_{x_1=a_1} = \mathrm{E}_2\omega_2\left(1+\frac{a_2}{h_2}\right)^2\left(\frac{d\mathrm{X}_2}{dx_2}\right)_{x_2=a_2};$$

formules qui se réduisent à celles (69) du cas de deux barres prismatiques, si

$$h_1 = \infty, \quad h_2 = \infty,$$

et si l'on y fait $x_1 = x$, $x_2 = a_1 + a_2 - x$.

La même analyse servirait pour des barres composées de plusieurs parties en forme de tronc de pyramide ou de cône, et par conséquent pour le choc de corps en forme de fuseau ou autres, où l'on puisse supposer que le mouvement s'opère par tranches parallèles.

Au Mémoire cité, complément de ceux que j'ai présentés depuis 1857 et qui vont être imprimés au *Journal de l'École Polytechnique*, on trouvera le développement de cette solution, à laquelle il convient de recourir quelquefois même pour les barres prismatiques, comme nous verrons plus loin, notamment quand une des deux parties a une section relativement fort grande, une longueur fort petite ou une résistance élastique considérable; suppositions qui, poussées plus loin encore, permettent de réduire l'une des deux parties ou barres à une masse étrangère parfaitement dure, pouvant être venue heurter l'autre barre supposée libre aussi, ce qui constitue un problème dont la solution directe a été presentée en 1865 [*].

Mais, en excluant ces cas extrêmes, et en revenant aux barres prismatiques, nous pouvons nous servir de la solution en termes finis

$$(72)\quad u_1 = f_1(x + k_1 t) + F_1(x - k_1 t), \quad u_2 = f_2(x + k_2 t) + F_2(x - k_2 t),$$

f_1, F_1, f_2, F_2 désignant des fonctions dont la forme peut varier brusquement, et qui en vertu de (64), (65), (66) doivent satisfaire à

$$(73)\quad f_1'(k_1 t) + F_1'(-k_1 t) = 0, \quad f_2'(a_1 + a_2 + k_2 t) + F_2'(a_1 + a_2 - k_2 t) = 0$$

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} & f_1(a_1 + k_1 t) + F_1(a_1 - k_1 t) = f_2(a_1 + k_2 t) + F_2(a_1 - k_2 t) \\ & f_1'(a_1 + k_1 t) + F_1'(a_1 - k_1 t) = r\frac{k_2}{k_1}[f_2'(a_1 + k_2 t) + F_2'(a_1 - k_2 t)] \end{aligned}\right\} \text{de } t = 0 \text{ à } t = \infty,$$

$$(75)\quad f_1 x + F_1 x = \varphi_1 x, \quad f_1' x - F_1' x = \frac{\psi_1 x}{k_1} \text{ de } x = 0 \text{ à } x = a_1,$$

$$(76)\quad f_2 x + F_2 x = \varphi_2 x, \quad f_2' x - F_2' x = \frac{\psi_2 x}{k_2} \text{ de } x = a_1 \text{ à } x = a_1 + a_2.$$

---

[*] 3 juillet, *Comptes rendus*, t. LXI, p. 33.

Si nous voulons en déduire les déplacements u_1, u_2 eux-mêmes, nous intégrerons les deux membres, multipliés par dx, de la deuxième équation (75) et de la deuxième équation (76) en choisissant arbitrairement, par la même raison que nous avons dite au n° **2** pour la deuxième équation (6), les constantes des seconds membres; par exemple, vu que c'est ce qu'il y a de plus simple, de manière que leurs intégrales s'annulent respectivement pour $x = 0$ et pour $x = a_1 + a_2$. Puis, après avoir déduit, comme au même n° **2**, des deux équations ainsi obtenues, combinées avec les premières (75), (76), et avec celles qui résultent de l'intégration des deux (73) de 0 à t, les valeurs de

$$f_1, \quad f_2, \quad F_1, \quad F_2,$$

pour des valeurs de leurs variables qui sont comprises entre certaines limites, nous nous servirons des deux conditions de *jonction* ou de *raccordement* (74), qui nous fourniront, en intégrant la seconde, des formules *promotrices* analogues à celles (82) qui seront données tout à l'heure, et qui feront pousser jusqu'à des limites croissant indéfiniment dans le sens positif pour f_1 et f_2 et dans le sens négatif pour F_1 et F_2.

Mais comme nous avons besoin surtout de connaître les vitesses et les contractions ou compressions

$$(77) \quad \begin{cases} v_1 = k_1 f'_1(x + k_1 t) - k_1 F'_1(x - k_1 t), \\ j_1 = -f'_1(x + k_1 t) - F'_1(x - k_1 t), \end{cases}$$

$$(78) \quad \begin{cases} v_2 = k_2 f'_2(x + k_2 t) - k_2 F_2(x - k_2 t), \\ j_2 = -f'_2(x + k_2 t) - F'_2(x - k_2 t), \end{cases}$$

et par conséquent les dérivées des fonctions f, F, nous différentierons au contraire celles des équations de condition (74), (75), (76), où ces fonctions ne le sont pas encore. Nous tirerons ainsi, de (75) et de (76), ζ désignant généralement la variable des fonctions,

$$(79) \quad \begin{cases} f'_1\left(\zeta = {a_1 \atop 0}\right) = \dfrac{\varphi'_1 \zeta}{2} + \dfrac{\psi_1 \zeta}{2 k_1}, & F'_1\left(\zeta = {0 \atop a_1}\right) = \dfrac{\varphi'_1 \zeta}{2} - \dfrac{\psi_1 \zeta}{2 k_1}, \\ f'_2\left(\zeta = {a_1 + a_2 \atop a_1}\right) = \dfrac{\varphi'_2 \zeta}{2} + \dfrac{\psi_2 \zeta}{2 k_2}, & F'_2\left(\zeta = {a_1 \atop a_1 + a_2}\right) = \dfrac{\varphi'_2 \zeta}{2} - \dfrac{\psi_2 \zeta}{2 k_2}; \end{cases}$$

d'où, comme les conditions (73) fournissent

$$(80)\quad F'_1\left(\zeta = {}^{-\infty}_{0}\right) = -f'_1(-\zeta),\quad f'_2\left(\zeta = {}^{\infty}_{a_1+a_2}\right) = -F'_2(2a_1+2a_2-\zeta),$$

nous déduirons

$$(81)\quad \begin{cases} F'_1\left(\zeta = {}^{-a_1}_{0}\right) = -\dfrac{\varphi'_1(-\zeta)}{2} - \dfrac{\psi_1(-\zeta)}{2k_1}, \\ f'_2\left(\zeta = {}^{a_1+2a_2}_{a_1+a_2}\right) = -\dfrac{\varphi'_2(2a_1+2a_2-\zeta)}{2} + \dfrac{\psi_2(2a_1+2a_2-\zeta)}{2k_2}. \end{cases}$$

Pour pousser plus loin les limites de ζ, servons-nous maintenant des équations (74) de condition de *raccordement* des deux parties du système.

Si l'on différentie la première par rapport à t, et si on les résout ensuite toutes deux par rapport à f'_1 et F'_2 regardées comme deux inconnues au premier degré, on tire

$$f'_1(a_1+k_1t) = \frac{r-1}{r+1}F'_1(a_1-k_1t) + \frac{2r}{r+1}\frac{k_2}{k_1}f'_2(a_1+k_2t),$$

$$F'_2(a_1-k_2t) = \frac{2}{r+1}\frac{k_1}{k_2}F'_1(a_1-k_1t) - \frac{r-1}{r+1}f'_2(a_1+k_2t).$$

Remplaçant par ζ les variables indéterminées des fonctions f'_1, F'_2, et ajoutant, en nouveaux membres, celles F'_1 et f'_2 qui, d'après les relations (80), ont les mêmes valeurs que $-f'_1$ et $-F'_2$, l'on déduit les doubles formules suivantes, que j'appelle *promotrices* parce qu'elles conduisent indéfiniment à des valeurs des quatre fonctions de plus en plus *avancées* quant aux valeurs de leurs variables,

$$(82)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} & f'_1\left(\zeta = {}^{\infty}_{a_1}\right) = \\ & = -F'_1\left(-\zeta = {}^{-\infty}_{-a_1}\right) \end{aligned}\right\} = \dfrac{r-1}{r+1}F'_1(2a_1-\zeta) + \dfrac{2r}{r+1}\dfrac{k_2}{k_1}f'_2\left[a_1 + \dfrac{k_2}{k_1}(\zeta-a_1)\right] \\ \left.\begin{aligned} & F'_2\left(\zeta = {}^{-\infty}_{a_1}\right) = \\ & = -f'_2\left(2a_1+2a_2-\zeta = {}^{\infty}_{a_1+2a_2}\right) \end{aligned}\right\} = \dfrac{2}{r+1}\dfrac{k_1}{k_2}F'_1\left[a_1 - \dfrac{k_1}{k_2}(a_1-\zeta)\right] - \dfrac{r-1}{r+1}f'_2(2a_1-\zeta). \end{cases}$$

Ces formules générales (82) servent, lorsqu'on connait pour certaines valeurs de leurs variables les quatre fonctions

$$f'_1(x+k_1t),\quad F'_1(x-k_1t),\quad f'_2(x+k_2t),\quad F'_2(x-k_2t),$$

à obtenir ce qu'elles deviennent quand on augmente les variables respectivement de

$$(83)\qquad 2a_1,\quad -2a_1,\quad 2\frac{k_2}{k_1}a_1,\quad -2\frac{k_2}{k_1}a_1,$$

ce qui équivaut, pour un même point ou une même valeur de x, à une augmentation du temps t de

$$2\tau_1 = 2\frac{a_1}{k_1}.$$

En effet, en partant, par exemple, de ce que nous connaissons déjà par les expressions (79) et (81), les formules promotrices (82) pourront nous donner (en indiquant simplement les limites des variables sous les signes f, F sans écrire ζ),

$$f'_1\begin{pmatrix}3a_1\\ a_1\end{pmatrix},\quad F'_1\begin{pmatrix}-3a_1\\ -a_1\end{pmatrix},\quad F'_2\begin{pmatrix}a_1-2\frac{k_2}{k_1}a_1\\ a_1\end{pmatrix},\quad f'_2\begin{pmatrix}a_1+2a_2+2\frac{k_2}{k_1}a_1\\ a_1+2a_2\end{pmatrix};$$

car, pour ces limites, on aura dans les troisièmes membres de (82),

$$F'_1\begin{pmatrix}-a_1\\ a\end{pmatrix},\quad f'_2\begin{pmatrix}a_1+2\frac{k_2}{k_1}a_1\\ a_1\end{pmatrix},$$

dont on connait bien les valeurs par (79) et (81), puisque $a_1+2\frac{k_2}{k_1}a_1$ est $< a_1+2a_2$ d'après l'hypothèse constante (62) $\frac{a_1}{k_1}<\frac{a_2}{k_2}$.

Mais comme, d'après les mêmes formules (79) à (81), F'_1 a des expressions différentes entre les valeurs $\begin{smallmatrix}0\\ a_1\end{smallmatrix}$ et entre les valeurs $\begin{smallmatrix}-a_1\\ 0\end{smallmatrix}$ de sa variable, et f'_2 a aussi une autre forme entre $\begin{smallmatrix}a_1+a_2\\ a_1\end{smallmatrix}$ qu'entre $\begin{smallmatrix}a_1+2a_2\\ a_1+a_2\end{smallmatrix}$, il est nécessaire de scinder en plusieurs parties les accroissements (83), $2a_1$, $-2a_1$, $2\frac{k_2}{k_1}a_1$, $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$, et cette *scission* devra être différente suivant les diverses grandeurs relatives de $\frac{a_1}{k_1}$ et de $\frac{a_2}{k_2}$.

Nous trouvons, de cette manière,

Lorsque $2\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$ ou $2\tau_1 < \tau_2$ $\left(\text{d'où } a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 < a_1 + a_2\right)$:

$$(84)\quad f'_1\left\{\begin{array}{c}3a_1\\ \\ \zeta=2a_1\\ \\ a_1\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}
\frac{r-1}{2(r+1)k_1}\left[-k_1\varphi'_1(\zeta-2a_1)-\psi_1(\zeta-2a_1)\right]\\
\quad+\frac{r}{(r+1)k_1}\left\{k_2\varphi'_2\left[a_1+\frac{k_2}{k_1}(\zeta-a_1)\right]+\psi_2\left[a_1+\frac{k_2}{k_1}(\zeta-a_1)\right]\right\},\\
\frac{r-1}{2(r+1)k_1}\left[k_1\varphi'_1(2a_1-\zeta)-\psi_1(2a_1-\zeta)\right]\\
\quad+\frac{r}{(r+1)k_1}\left\{k_2\varphi'_2\left[a_1+\frac{k_2}{k_1}(\zeta-a_1)\right]+\psi_2\left[a_1+\frac{k_2}{k_1}(\zeta-a_1)\right]\right\}:
\end{array}\right.$$

$$(85)\quad F'_2\left\{\begin{array}{c}a_1-2\frac{k_2}{k_1}a_1\\ \\ \zeta=a_1-\frac{k_2}{k_1}a_1\\ \\ a_1\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}
-\frac{1}{(r+1)k_2}\left\{k_1\varphi'_1\left[-a_1+\frac{k_1}{k_2}(a_1-\zeta)\right]+\psi_1\left[-a_1+\frac{k_1}{k_2}(a_1-\zeta)\right]\right\}\\
\quad-\frac{r-1}{2(r+1)k_2}\left[k_2\varphi'_2(2a_1-\zeta)+\psi_2(2a_1-\zeta)\right],\\
\frac{1}{(r+1)k_2}\left\{k_1\varphi'_1\left[a_1+\frac{k_1}{k_2}(\zeta-a_1)\right]-\psi_1\left[a_1-\frac{k_1}{k_2}(a_1-\zeta)\right]\right\}\\
\quad-\frac{r-1}{2(r+1)k_2}\left[k_2\varphi'_2(2a_1-\zeta)+\psi_2(2a_1-\zeta)\right].
\end{array}\right.$$

Et, lorsque

$\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2\frac{a_1}{k_1}$, ou $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$ $\left(\text{d'où } a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 > a_1 + a_2\right)$,

il faudra, en conservant les formules inférieures de (84) et (85), ou les expressions ci-dessus de $f'_1\left(\begin{matrix}2a_1\\ a_1\end{matrix}\right)$ et $F'_2\left(\begin{matrix}a_1-\frac{k_2}{k_1}a_1\\ a_1\end{matrix}\right)$, opérer une nouvelle scission pour les intervalles supérieurs $\begin{matrix}3a_1\\ 2a_1\end{matrix}$ et $\begin{matrix}a_1-2\frac{k_1}{k_2}a_2\\ a_1-\frac{k_1}{k_2}a_2\end{matrix}$, et prendre

$$
(86)\quad f'_1\left\{\begin{matrix} 3a_1 \\ \\ \zeta = a_1 + \dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ \\ 2a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r-1}{2(r+1)k_1}[-k_1\varphi'_1(\zeta - 2a_1) - \psi_1(\zeta - 2a_1)] \\ \qquad + \dfrac{r}{(r+1)k_1}\left\{-k_2\varphi'_2\left[a_1 + 2a_2 - \dfrac{k_2}{k_1}(\zeta - a_1)\right] + \psi_2\left[a_1 + 2a_2 - \dfrac{k_1}{k_2}(\zeta - a_1)\right]\right\}; \\ \dfrac{r-1}{2(r+1)k_1}[-k_1\varphi'_1(\zeta - 2a_1) - \psi_1(\zeta - 2a_1)] \\ \qquad + \dfrac{r}{(r+1)k_1}\left\{k_2\varphi'_2\left[a_1 + \dfrac{k_2}{k_1}(\zeta - a_1)\right] + \psi_2\left[a_1 + \dfrac{k_2}{k_1}(\zeta - a_1)\right]\right\}. \end{array}\right.
$$

$$
(87)\quad F'_2\left\{\begin{matrix} a_1 - 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ \\ \zeta = a_1 - a_2 \\ \\ a_1 - \dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{(r+1)k_2}\left\{-k_1\varphi'_1\left[-a_1 + \dfrac{k_1}{k_2}(a_1 - \zeta)\right] - \psi_1\left[-a_1 + \dfrac{k_1}{k_2}(a_1 - \zeta)\right]\right\} \\ \qquad - \dfrac{r-1}{2(r+1)k_2}[-k_2\varphi'_2(2a_2 + \zeta) + \psi_2(2a_2 + \zeta)]; \\ \dfrac{1}{(r+1)k_2}\left\{-k_1\varphi'_1\left[-a_1 + \dfrac{k_1}{k_2}(a_1 - \zeta)\right] - \psi_1\left[-a_1 + \dfrac{k_1}{k_2}(a_1 - \zeta)\right]\right\} \\ \qquad - \dfrac{r-1}{2(r+1)k_2}[k_2\varphi'_2(2a_1 - \zeta) + \psi_2(2a_1 - \zeta)]. \end{array}\right.
$$

Et l'on en déduira les valeurs des fonctions F'_1 et f'_2 au moyen de (80),

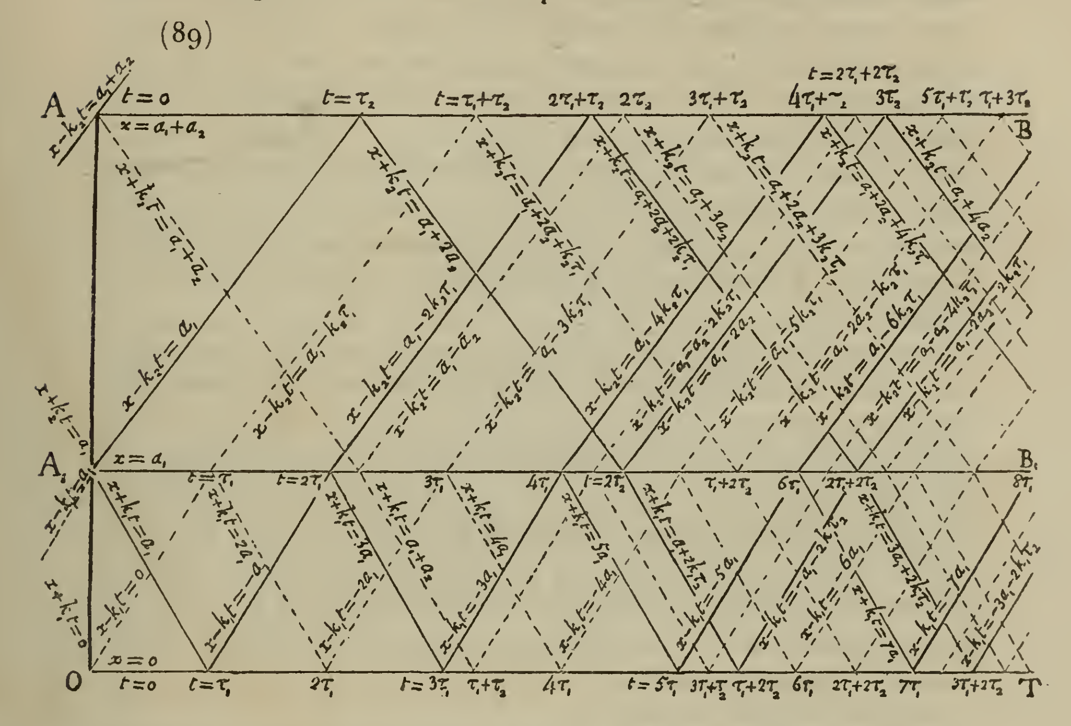
$$
(88)\quad F'_1(\zeta) = -f'_1(-\zeta), \quad f'_2(\zeta) = -F'_2(2a_1 + 2a_2 - \zeta).
$$

Pour passer, par le moyen des mêmes formules promotrices (82), aux valeurs que prennent les quatre fonctions quand leurs variables s'accroissent de nouveau de (83) $2a_1$, $-2a_1$, $2\frac{k_2}{k_1}a_1$, $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$, et ainsi indéfiniment, il faudra opérer de nouvelles scissions qui seront en nombre de plus en plus grand ainsi que les changements brusques de formes de ces fonctions, essentiellement discontinues comme on voit.

Les limites de ces scissions ou coupures d'intervalles seront fournies facilement et sans méprises par une construction comme celle (23) qui a été faite au n° 5, c'est-à-dire par une représentation, en prenant cette fois-ci, non plus les kt, mais les temps t eux-mêmes pour abscisses comptées sur une droite OT, et des ordonnées x prises perpendiculairement à cette droite, de la marche en deux sens, avec des vitesses k_1 et k_2, de points d'ébranlement partant à la fois des extrémités $x = 0$ et $x = a_1 + a_2$, et de la jonction $x = a_1$ des deux barres ou parties

de barres $OA_1 = a_1$, $A_1A = a_2$, comme si tous leurs points matériels étaient transportés latéralement ou parallèlement à OT avec une vitesse

(89)



commune quelconque. On a ponctué les lignes d'ébranlement qui tirent leur origine des extrémités libres O, A, et tracé plein celles qui partent de la jonction A_1. Celles de la partie supérieure, relatives à la barre a_2, n'ont pas, comme dans la figure du n° 3, les mêmes inclinaisons que celles de la partie inférieure relative à la barre a_1, car k_2 n'est pas égal à k_1. On peut remarquer aussi, dans la figure ci-contre, un grand nombre de lignes inclinées dont les analogues ne se trouvent pas dans la figure ou le diagramme n° 23 que nous citons; cela vient de ce qu'ici, en raison de la différence de grosseur et de matière des deux parties a_1, a_2, les ébranlements se *réfléchissent* non-seulement aux extrémités libres $x = 0$, $x = a_1 + a_2$, mais *aux extrémités jointives* $x = a_1$, ce qui ne les empêche pas, en même temps, de passer ou de se *réfracter* en quelque sorte d'une barre dans l'autre avec d'autres vitesses.

On a écrit, sur quelques-unes de ces lignes inclinées, comme au n° 3,

leurs équations en x et t, ou, ce qui revient au même, les valeurs correspondantes de $x + k_1 t$ ou $x + k_2 t$ qui sont des quantités constantes pour toutes les lignes *descendantes* (de gauche à droite), et celles de $x - k_1 t$ ou $x - k_2 t$ qui sont des quantités constantes pour les lignes *montantes*. Et les autres pourront s'écrire facilement en prenant constamment, dans la partie inférieure, $x \pm k_1 t$ égal à $\pm$ le produit de k_1 par l'abscisse de l'intersection de la ligne inclinée correspondante avec l'horizontale OT du bas; et, dans la partie supérieure, relative à a_2, $x \pm k_2 t$ égal à $a_1 + a_2 \pm$ le produit par k_2 de l'abscisse t du point où la ligne inclinée correspondante coupe AB, qui est une parallèle à OT.

Pour tous les points matériels et les instants qui sont représentés par les points de la figure se trouvant dans l'intérieur de chaque quadrilatère ou triangle, les fonctions f'_1, F'_1 ou f'_2, F'_2 ont, non pas une même grandeur constante comme au n° **3**, mais *une même forme* ou *une même expression* en ψ_1, φ'_1 ou ψ_2, φ'_2; forme ou expression qui change brusquement quand on passe d'un espace à l'autre. Il s'ensuit que les valeurs constantes de $x + k_1 t$, pour deux parallèles voisines, indiqueront *les limites consécutives de la variable* ζ *de* f'_1, et les valeurs constantes de $x - k_2 t$ indiqueront de même *les limites des valeurs de la variable* ζ *de* F'_2.

La figure est faite pour le cas

$$2\tau < \tau_2, \quad \text{ou} \quad 2\frac{a_1}{k_2} < \frac{a_2}{k^2}.$$

On peut, dans les autres cas, se dispenser d'en construire d'autres, quand on a besoin seulement de poser les expressions comme (84) à (88) des fonctions f, F; car il suffit de ranger suivant leur ordre de grandeur les abscisses des points de OT et de AB selon les diverses relations de $\frac{a_1}{k_1}$ à $\frac{a_2}{k_2}$, pour en déduire facilement, comme on vient de dire, les limites diverses de scission des variables $x + k_1 t$ de f'_1 et $x - k_2 t$ de F'_2. Mais si l'on veut en déduire ensuite les valeurs (77), (78), de v_1, j_1, v_2, j_2, ces figures devront être construites, et sur une échelle un peu plus grande, comme diagrammes (n° **10**, ci-après) indiquant les valeurs en question pour tous les points des barres et pour les instants successifs.

Le nombre des changements de forme des expressions des vitesses ou des contractions v_1, v_2, j_1, j_2 serait, comme on voit, infini pour un accroissement fini quelconque du temps si τ_1 était infiniment petit; c'est-à-dire si l'une des barres ou parties de barre était ou infiniment courte ou infiniment roide, ou si elle était comme une masse vibrant en bloc et non par tranches successives. Cela montre bien, comme nous l'avons dit tout à l'heure, que les solutions en termes finis ne sont point alors applicables; elles cessent même déjà de l'être quand l'une des deux parties est seulement *très*-courte, et il faut alors recourir aux solutions en séries trancendantes telles que (70), plus simples d'ailleurs, en général, quand le temps devient un multiple très-considérable de celui $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$ que le son met à parcourir la partie a_1.

9. *Problème du choc mutuel de deux parties a_1, a_2, de grosseurs et de matières différentes; ou, plus généralement, de leur mouvement l'une avec l'autre lorsqu'elles ont été animées respectivement d'un bout à l'autre de vitesses* V_1, V_2 *sans contraction initiale. Détermination, d'abord, des valeurs successives des fonctions arbitraires* f, F.

Il faut faire alors

$$(90)\qquad \varphi'_1\zeta = 0,\quad \varphi'_2\zeta = 0,\quad \psi_1\left(\zeta = {}^{a_1}_{0}\right) = V_1,\quad \psi_2\left(\zeta = {}^{a_1+a_2}_{a_1}\right) = V_2.$$

Nous prenons toujours l'origine des x à l'extrémité libre de la barre a_1 le plus tôt parcourue par l'ébranlement, les vitesses étant comptées positivement, comme au n° 4, quand elles vont dans le sens de cette barre à l'autre a_2, et devant, pour qu'il puisse y avoir choc, être telles, quels que soient leurs signes, que

$$(91)\qquad V_1 - V_2 > 0.$$

Dans ce cas simple, les subdivisions ou scissions d'intervalles hors desquelles les expressions changent de forme sont un peu moins nombreuses, parce que les diagrammes construits comme celui du numéro précédent n'ont plus les lignes d'ébranlement ponctuées qui partaient des extrémités libres $x = 0$, $x = a_1 + a_2$. Les fonctions f, F se réduisent en même temps à une suite de constantes, en sorte qu'on peut effacer ζ de leurs désignations. Les six formules (79) et (81)

se réduisent à

$$(92)\quad \left\{ \begin{aligned} & f'_1\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -F'_1\begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{V_1}{2k_1}, \\ & f'_2\begin{pmatrix} a_1+2a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = -F'_2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1+a_2 \end{pmatrix} = \frac{V_2}{2k_2}. \end{aligned} \right.$$

Et les huit formules (84) à (87) donnant f'_1, F'_2, ainsi que les huit autres qu'on en déduit par (88) pour F'_1, f'_2, se réduisent aux deux doubles formules suivantes, qu'on aurait pu, au reste, tirer directement des promotrices (82), et de (92),

$$(93)\quad \left\{ \begin{aligned} & f'_1\begin{pmatrix} 3a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = -F'_1\begin{pmatrix} -3a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} = \frac{2rV_2-(r-1)V_1}{2(r+1)k_1} = \frac{V_2}{2k_1} + \frac{1-r}{1+r}\,\frac{V_1-V_2}{2k_1}, \\ & f'_2\begin{pmatrix} a_1+2a_2+2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1+2a_2 \end{pmatrix} = -F'_2\begin{pmatrix} a_1-2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{2V_1+(r-1)V_2}{2(r+1)k_2} \\ & \qquad = \frac{V_1}{2k_2} + \frac{1-r}{1+r}\,\frac{V_1-V_2}{2k_2} = \frac{V_2}{2k_2} + 2\,\frac{V_1-V_2}{2(1+r)k_2}. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions (92), (93) ne nous conduisent à calculer les vitesses et les compressions que jusqu'au temps $t = 2\tau$.

Pour pouvoir aller jusqu'à $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$ comme au n° 4, il faut que nous déterminions les scissions à faire subir aux accroissements $2a_1$ et $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$ que les promotrices (82) donnent aux variables ζ de f''_1 et de F'_2. Nous y arriverons avec sûreté, 1° en ce qui regarde f''_1, en rangeant dans chaque cas, suivant leur ordre de grandeur croissante, les temps

$$t = \tau_1,\ 3\tau_1,\ 5\tau_1,\ \tau_1+2\tau_2,\ 7\tau_1,\ 3\tau_1+2\tau_2, \ldots,\ (2i_1+1)\tau_1+2i_2\tau_2, \ldots,$$

où l'ébranlement partant en deux sens du point de jonction $x = a_1$ se réfléchit à l'extrémité libre $x = 0$ de la première barre; d'où, en multipliant ces temps par k_1, les valeurs suivantes de la variable de f''_1

$$x + k_1 t = a_1,\ 3a_1,\ 5a_1,\ a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_1,\ 7a_1,\ 3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2, \ldots,\ (2i_1+1)a_1 + 2i_2\frac{k_1}{k_2}a_2, \ldots$$

2° En ce qui regarde F'_2, en rangeant de même les temps

$$t = \tau_2,\quad 2\tau_1+\tau_2,\quad 4\tau_1+\tau_2,\quad 3\tau_2, \ldots$$

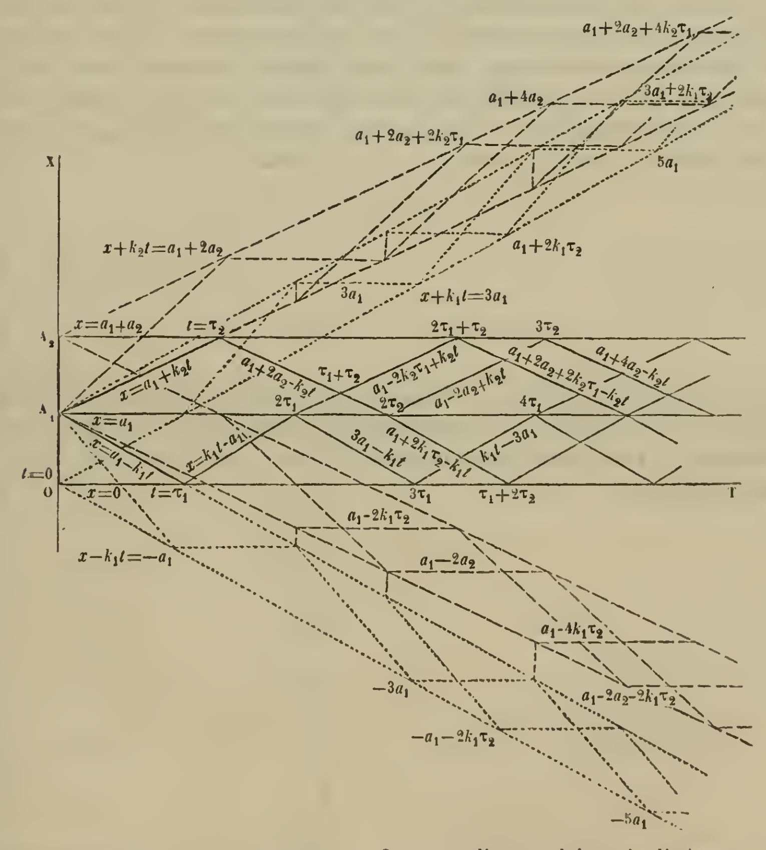
des réflexions qui s'opèrent à l'extrémité libre $x = a_1 + a_2$ de la

deuxième barre; puis en prenant les excès de $a_1 + a_2$ sur les produits de ces temps par k_2, ce qui donne pour les valeurs successives de la variable de F'_2

$$x - k_2 t = a_1,\quad a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1,\quad a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1,\quad a_1 - 2a_2,\ldots,\quad a_1 - 2i_2 a_2 - 2i_1\frac{k_2}{k_1}a_1,\ldots$$

En effet, ainsi qu'on l'a dit au numéro précédent, analogiquement à ce qui avait été remarqué au n° **4**, ces deux suites donnent les valeurs des variables $x + k_1 t$, $x - k_2 t$ de f'_1, F'_2, entre lesquelles ces fonctions conservent les mêmes grandeurs constantes, et au delà ou en deçà desquelles les grandeurs de f'_1, F'_2 changent brusquement [*].

(*) La figure ci-dessous, dont je me suis servi lors de la présentation de ce Mémoire, achèvera au besoin de faire comprendre ce qui vient d'être dit.



Elle est relative au cas où $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$. Les lignes pleines inclinées sont tou-

Voici un tableau qui donne, pour les diverses relations de grandeur de $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$ à $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$, l'ordre dans lequel on doit ainsi prendre les diverses limites de scission des accroissements successifs des variables

$$\zeta = x + k_1 t, \quad \zeta = x - k_2 t$$

des fonctions f'_1, F'_2 occupant les premiers membres des deux formules promotrices (82).

On y a ajouté comme première ligne, pour le compléter, les limites inférieures des mêmes variables dans les expressions (92):

---

jours celles dont les ordonnées donnent les x des emplacements actuels des deux points d'ébranlement pour chaque instant, ou pour chaque abscisse t comptée sur OT; et les quatre lignes ponctuées en zigzag, dont chaque système est contenu entre deux parallèles ponctuées de même, donnent, par leurs ordonnées, les $x \pm k_1 t$ (points ronds), et les $x \pm k_2 t$ (points longs) qui y correspondent. On aperçoit bien que ces ordonnées ont pour limites successives, savoir, les $x + k_1 t$, celles

$$a_1, \quad 3a_1, \quad a_1 + 2k_1\tau_2 = a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2, \ldots,$$

et les $x - k_2 t$, celles

$$a_1, \quad a_1 - 2k_1\tau_2 = a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2, \quad a_1 - 2a_2, \ldots$$

des parties horizontales de deux des lignes brisées ponctuées répondant aux deux parties des lignes brisées pleines qui représentent la marche des points d'ébranlement, et nous savons (nº **3**) qu'entre ces points les fonctions f'_1, F'_2 ont à chaque instant des valeurs constantes.

(94)

TEMPS t.	LIMITES DE SCISSION — de $x+k_1t$, variable de f'_1.	LIMITES DE SCISSION — de $x-k_2t$, variable de F'_2.	ORDRE DE LEURS GRANDEURS DANS LES CAS — $\tau_1<\tau_2$ ou $\frac{a_1}{k_1}<\frac{a_2}{k_2}$	$2\tau_1<\tau_2$	$\tau_1<\tau_2<2\tau_1$	$3\tau_1<\tau_2$	$2\tau_1<\tau_2<3\tau_1$	$2\tau_1<2\tau_2<3\tau_1$	$3\tau_1<2\tau_2<4\tau_1$	$4\tau_1<\tau_2$	$3\tau_1<\tau_2<4\tau_1$	$4\tau_1<\tau_2<5\tau_1$
	o	a_1+a_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
τ_1	a_1	a_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$3\tau_1$	$3a_1$	$a_1-2\frac{k_2}{k_1}a_1$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$5\tau_1$	$5a_1$	$a_1-4\frac{k_2}{k_1}a_1$	»	4	5	4	4	5	5	4	4	4
$7\tau_1$	$7a_1$	$a_1-6\frac{k_2}{k_1}a_1$		»	»	5	6	8	7	5	5	5
$9\tau_1$	$9a_1$	$a_1-8\frac{k_2}{k_1}a_1$				»	8	»	10	6	7	6
$11\tau_1$	$11a_1$	$a_1-10\frac{k_2}{k_1}a_1$					»		»	»	9	8
$13\tau_1$	$13a_1$	$a_1-12\frac{k_2}{k_1}a_1$									11	10
$15\tau_1$	$15a_1$	$a_1-14\frac{k_2}{k_1}a_1$									»	12
$17\tau_1$	$17a_1$	$a_1-16\frac{k_2}{k_1}a_1$										14
$19\tau_1$	$19a_1$	$a_1-18\frac{k_2}{k_1}a_1$										»
....	....	....										
$\tau_1+2\tau_2$	$a_1+2\frac{k_1}{k_2}a_2$	a_1-2a_2	»	»	4	»	5	4	4	»	6	7
$3\tau_1+2\tau_2$	$3a_1+2\frac{k_1}{k_2}a_2$	$a_1-2a_2-2\frac{k_2}{k_1}a_1$			6		7	6	6		8	9
$5\tau_1+2\tau_2$	$5a_1+2\frac{k_1}{k_2}a_2$	$a_1-2a_2-4\frac{k_2}{k_1}a_1$					9	9	9		10	11
$7\tau_1+2\tau_2$	$7a_1+2\frac{k_1}{k_2}a_2$	$a_1-2a_2-6\frac{k_2}{k_1}a_1$							12		12	13
$9\tau_1+2\tau_2$	$9a_1+2\frac{k_1}{k_2}a_2$	$a_1-2a_2-8\frac{k_2}{k_1}a_1$										15
....	....	....										
$\tau_1+4\tau_2$	$a_1+4\frac{k_1}{k_2}a_2$	a_1-4a_2			»		»	7	8		»	»
$3\tau_1+4\tau_2$	$3a_1+4\frac{k_1}{k_2}a_2$	$a_1-4a_2-2\frac{k_2}{k_1}a_1$						10	11			
$5\tau_1+4\tau_2$	$5a_1+4\frac{k_1}{k_2}a_2$	$a_1-4a_2-4\frac{k_2}{k_1}a_1$										
....	....	....										
$\tau_1+6\tau_2$	$a_1+6\frac{k_1}{k_2}a_2$	a_1-6a_2						»	»			
....	....	....										

En considérant, par exemple, la sixième colonne de chiffres, intitulée $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$, l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 qu'elle indique est bien, quand τ_1 et τ_2 ont cette relation, celui des grandeurs des temps $t = 0, \tau_1, 3\tau_1, \tau_1 + 2\tau_1, 5\tau_1, 3\tau_1 + 2\tau_2, ..$ inscrits dans la première colonne du tableau, et, par suite, des $x + k_1 t$, $x - k_2 t$ correspondants, dont les valeurs sont inscrites dans les deux colonnes de limites de scission.

Dans chaque colonne de chiffres, il ne peut pas y en avoir plus qu'on n'en a mis, et les suites sont essentiellement bornées tant que le rapport de grandeur de τ_1 à τ_2 n'est pas plus déterminé que par les relations telles que $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$, etc.; car, en prenant encore pour exemple la sixième colonne qui porte ce titre, il est évident qu'après le temps $t = 3\tau_1 + 4\tau_2$, qui répond au chiffre 10, on aurait, si l'on continuait par grandeur croissante, *l'un ou l'autre* des temps $t = 9\tau_1$ et $t = \tau_1 + 6\tau_2$ qui répondent aux guillemets mis à la même colonne. Or on ne sait pas, d'après une pareille relation de grandeur, donnée entre τ_1 et τ_2, si l'on a $9\tau_1 >$ ou $< \tau_1 + 6\tau_2$, car c'est la même chose que $\tau_2 <$ ou $> \frac{4}{3}\tau_1$, et l'on ignore lequel des deux a lieu, puisque $\frac{4}{3}\tau_1$ est compris entre $\frac{2}{3}\tau_1$ et $\frac{3}{2}\tau_1$, limites entre lesquelles peut varier τ_2 par hypothèse. La suite des rangements par ordre de grandeur a donc dû être arrêtée au chiffre 10.

De même, dans les autres colonnes de chiffres, les guillemets répondent à deux valeurs de t de la colonne des temps, dont l'ordre de grandeur mutuelle est incertain, ce que l'on reconnaît si, en les retranchant l'une de l'autre et divisant par le coefficient de τ_2, la fraction qui affecte alors τ_1 est comprise entre celles dans les limites desquelles $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ peut varier. Comme on ne sait, ainsi, lequel de ces deux temps est le plus grand, on doit les retrancher l'un et l'autre de la série ainsi que tous les temps plus considérables.

On voit que pour avoir les valeurs des fonctions f'_1, F'_1, f'_2, F'_2, quand le temps croît, il faut faire de plus en plus de ces distinctions de grandeurs relatives de τ_1 et τ_2 dont Cauchy a donné le premier exemple par sa distinction (n° 4) des cas $a_2 > 2a_1$ et $a_2 < 2a_1$ quand $k_1 = k_2$.

En scindant, suivant ces séries, les accroissements $2a_1$ et $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$ que les formules promotrices (82) apportent aux variables des fonctions f_1'', F_1', occupant leurs premiers membres, les variables des fonctions F_1', f_2' qui se trouvent dans les troisièmes membres resteront dans les limites pour lesquelles on a précédemment obtenu les expressions de ces dernières fonctions.

On trouve ainsi, en faisant, pour abréger,

$$(95)\left\{\begin{aligned}
&V_1 - V_2 = W,\\
&\frac{V_1 - V_2}{1+r} = W_{,},\quad \frac{1-r}{1+r}(V_1 - V_2) = W'_{,},\quad \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}(V_1 - V_2) = W''_{,,},\quad \frac{(1-r)^3}{(1+r)^3}(V_1 - V_2) = W'''_{,,,},\ldots,\\
&\frac{V_1 - V_2}{(1+r)_2} = W_{,,},\quad \frac{1-r}{(1+r)^2}(V_1 - V_2) = W'_{,,},\quad \frac{(1-r)^2}{(1+r)^3}(V_1 - V_2) = W''_{,,,},\quad \frac{(1-r)^3}{(1+r)^4}(V_1 - V_2) = W'''_{\text{IV}},\ldots,\\
&\frac{V_1 - V_2}{(1+r^2} = W_{,,,},\quad \frac{1-r}{(1+r)^3}(V_1 - V_2) = W'_{,,,},\quad \frac{(1-r)^2}{(1+r)^4}(V_1 - V_2) = W''_{\text{IV}},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

les formules ci-après (98) à (111), que nous faisons précéder, sous les désignations (96) et (97), de celles (92), (93) précédemment trouvées, afin de rendre le tableau complet (voir aussi après).

Cas général $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$ (ou $\tau_1 < \tau_2$) sans autre détermination :

(96)

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} a_1 \\ 0 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} -a_1 \\ a_1 \end{matrix}\right\} = V_1,$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 \\ a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \end{matrix}\right\} = V_2;$$

(97)

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} 3a_1 \\ a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} -3a_1 \\ -a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + \frac{1-r}{1+r}(V_1 - V_2) = V_1 - 2rW_{,} = V_2 + W'_{,}.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + 2\frac{V_1 - V_2}{1+r} = V_1 + W'_{,} = V_2 + 2W_{,};$$

(98) Cas $2\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2}$ (ou $2\tau_1 < \tau_2$), comme (96), (97); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{matrix} 5a_1 \\ 3a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F'_1 \left\{\begin{matrix} -5a_1 \\ -3a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + W''_{''},$$

$$2k_2 f'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 4\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 - 4\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + 2W'_{''};$$

(99) Cas $3\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2}$, comme (96), (97), (98); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{matrix} 7a_1 \\ 5a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F'_1 \left\{\begin{matrix} -7a_1 \\ -5a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + W'''_{'''},$$

$$2k_2 f'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 4\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 - 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + 2W''_{'''};$$

(100) Cas $4\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2}$, comme (96), (97), (98), (99); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{matrix} 9a_1 \\ 7a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F'_1 \left\{\begin{matrix} -9a_1 \\ -7a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + W^{\text{IV}}_{\text{IV}},$$

$$2k_2 f'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 - 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + 2W'''_{\text{IV}};$$

(101) Cas $5\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2}$, comme (96), (97), (98), (99), (100); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{matrix} 11a_1 \\ 9a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F'_1 \left\{\begin{matrix} -11a_1 \\ -9a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + W^{\text{V}}_{\text{V}}$$

$$2k_2 f'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 10\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 - 10\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + 2W^{\text{IV}}_{\text{V}};$$

(102) Cas $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2\frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97); et, de plus :

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} 3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 5a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 3a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} -3a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -5a_1 \\ -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -3a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 4rW_{''} + W'''_{'''} = V_1 - 2rW''_{'''} \\ V_2 + W = V_1 \\ V_2 + W''_{''}, \end{matrix}\right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} a_1 + 4a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} a_1 - 2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 - 2W'_{''} + 2W''_{'''} = V_2 - 4rW'_{'''} \\ V_2 \\ V_2 + 2W'_{''}; \end{matrix}\right.$$

(103) Cas $2\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 3\frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (98); et, de plus :

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} 7a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 5a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} -7a_1 \\ -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -5a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 4rW_{''} + V'''_{'''} = V_1 - 2rW''_{'''} \\ V_2 + W'''_{'''}, \end{matrix}\right.$$

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} 5a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 9a_1 \\ 3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 7a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} -5a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -9a_1 \\ -3a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -7a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 8rW'_{'''} + W^{V}_{V} \\ V_2 + 8rW'_{'''} + W^{IV}_{IV} \\ V_2 + 4rW_{''} + W^{IV}_{IV} = V_1 - 4rW^{IV}_{IV}, \end{matrix}\right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 - 2W'_{''} + 2W''_{'''} = V_2 - 4rW'_{'''} \\ V_2 + 2W''_{'''}, \end{matrix}\right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} a_1 + 4a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} a_1 - 2a_2 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 8rW_{'''} - 8rW''_{V} \\ V_2 + 8rW_{'''} - 4rW''_{IV} \\ V_2 - 8rW'_{IV}; \end{matrix}\right.$$

(104) Cas $3\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2} < 4\dfrac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (98), (99); et, de plus:

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} 9a_1 \\ a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ 7a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} -9a_1 \\ -a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -7a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 4rW_{\prime\prime} + W_{iv}^{iv} = V_1 - 4rW_{iv}'' \\ V_2 + W_{iv}^{iv}, \end{matrix}\right.$$

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ 11a_1 \\ 3a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ 9a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ -11a_1 \\ -3a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -9a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 8rW_{\prime\prime\prime}' + W_v^v \\ V_2 + 4rW_{\prime\prime} + W_v^v: \end{matrix}\right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} a_1 - 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 - 8rW_{iv}' \\ V_2 + 2W_{iv}'''; \end{matrix}\right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ a_1 + 2a_2 + 10\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = 2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ a_1 - 10\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 32r^2W_v \\ V_2 - 2W_{\prime\prime}' + 2W_v^{iv}. \end{matrix}\right.$$

(105) Cas $4\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2} < 5\dfrac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (98), (99), (100); et, de plus:

$$2k_1 f_1' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ 11a_1 \\ a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ 9a \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ -11a_1 \\ -a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -9a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_1 - W_{\prime\prime}'' + W_v^v = V_2 + 4rW_{\prime\prime} + W_v^v \\ V_2 + W_v^v: \end{matrix}\right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ a_1 + 2a_2 + 10\dfrac{k_2}{k_1}a_2 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots \\ a_1 - 10\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 - 2W_{\prime\prime}' + 2W_v^v \\ V_2 + 2W_v^{iv}; \end{matrix}\right.$$

(106) Cas $2\frac{a_1}{k_1} < 2\frac{a_2}{k_2} < 3\frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (102); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{array}{l} 3a_1 + 4\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 5a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 7a_1 \\ a_1 + 4\frac{k_1}{k_1}a_2 \\ 3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \end{array}\right\} = -2k_1 F'_1 \left\{\begin{array}{l} -3a_1 - 4\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -5a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -7a_1 \\ -a_1 - 4\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -3a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} V_2 + W''_{\prime\prime} - 4rW'_{\prime\prime\prime} + 8rW''_{IV} \\ V_2 + W'_{\prime} - 2rW''_{IV} \\ V_2 + W'_{\prime} \\ V_2 + 2W'_{\prime} - W'''_{\prime\prime\prime}, \end{array}\right.$$

$$2k_2 f'_2 \left\{\begin{array}{l} a_1 + 6a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 6a_2 \\ a_1 + 4a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{array}\right\} = -2k_2 F'_2 \left\{\begin{array}{l} a_1 - 4a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4a_2 \\ a_1 - 2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} V_2 + 2W''_{\prime\prime\prime} + 16rW'_{IV} \\ V_2 + 2W_{\prime} - 4rW''_{IV} \\ V_1 + W'_{\prime} = V_2 + 2W_{\prime} \\ V_2 + 2W_{\prime} - 2W''_{\prime\prime\prime}; \end{array}\right.$$

(107) Cas $3\frac{a_1}{k_1} < 3\frac{a_2}{k_2} < 4\frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (102), (106); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ 9a_1 \\ a_1 + 6\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 3a_1 + 4\frac{k_1}{k_2}a_2 \end{array}\right\} = -2k_1 F'_1 \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ -9a_1 \\ -a_1 - 6\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -3a_1 - 4\frac{k_1}{k_2}a_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} V_1 \\ V_2 + 4rW_{\prime\prime} + W^{IV}_{IV} = V_1 - 4rW''_{IV} \end{array}\right.$$

$$2k_2 f'_2 \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ a_1 + 2a_2 + 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 8a_2 \\ a_1 + 6a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{array}\right\} = -2k_1 F'_4 \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ a_1 - 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 6a_2 \\ a_1 - 4a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} V_2 \\ V_2 + 2W'''_{IV} \end{array}\right.$$

(108) Cas $3\dfrac{a_1}{k_1} < 2\dfrac{a_2}{k_2} < 4\dfrac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (102); et, de plus :

$$2k_2 f_1' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots\cdots \\ 9a_1 \\ 5a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ a_1 + 4\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ 7a_1 \\ 3a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \end{matrix}\right\} = -2k_1 F_1' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots\cdots \\ -9a_1 \\ -5a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -a_1 - 4\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -7a_1 \\ -3a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + W''_{\prime\prime} - 4rW'_{\prime\prime} + 8rW''_{\mathrm{IV}} \\ V_2 + W'_{\prime} - 2rW'''_{\mathrm{IV}} \\ V_2 + 8rW'_{\prime\prime\prime} + W^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{IV}} \\ V_2 + 2W'_{\prime} - W'''_{\prime\prime\prime}, \end{matrix}\right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots\cdots \\ a_1 + 2a_2 + 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 4\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 6a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = -2k_2 F_2' \left\{\begin{matrix} \cdots\cdots\cdots \\ a_1 - 8\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 4\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4a_2 \\ a_1 - 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} V_2 + 4W'_{\prime\prime} + 4rW''_{\mathrm{IV}} - 2W'''_{\mathrm{IV}} \\ V_2 + 2W_{\prime} - 4rW''_{\mathrm{IV}} \\ V_2 + 8rW_{\prime\prime\prime} - 4rW''_{\mathrm{IV}} \\ V_2 + 2W_{\prime} - 2W''_{\prime\prime\prime}. \end{matrix}\right.$$

On voit que dans chacun des cas particuliers à partir de (98), l'on renvoie, pour les premiers et plus petits intervalles non mentionnés des valeurs des variables, à des formules déjà établies, relatives à des cas précédemment traités. C'est que ceux-ci comprennent implicitement ceux-là. Ainsi :

(109)

le cas général $\tau_1 < \tau_2$ ou $\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2}$ comprend

- $2\tau_1 < \tau_2$ qui comprend
  - $3\tau_1 < \tau_2$ qui comprend
    - $4\tau_1 < \tau_2$ qui comprend $5\tau_1 < \tau_2$, et $4\tau_1 < \tau_2 < 5\tau_1$.
    - et $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ qui comprend $6\tau_1 < 2\tau_2 < 7\tau_1$ et $7\tau_1 < 2\tau_2 < 8\tau_1$
  - et $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$ qui comprend $4\tau_1 < 2\tau_2 < 5\tau_1$, et $5\tau_1 < 2\tau_2 < 6\tau_1$.
- et $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$ qui comprend
  - $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$ qui comprend $3\tau_1 < 3\tau_2 < 4\tau_1$, et $4\tau_1 < 3\tau_2 < 5\tau_1$.
  - et $3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1$ qui comprend $6\tau_1 < 4\tau_2 < 7\tau_1$, et $7\tau_1 < 4\tau_2 < 8\tau_1$.

Réciproquement, chacune des relations d'inégalité qui sont écrites vers la droite de ce tableau (109) *entraîne* celles qui sont à sa gauche. Par exemple, $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ entraîne évidemment $3\tau_1 < \tau_2$ qui entraîne *à fortiori* $2\tau_1 < \tau_2$ qui entraîne $\tau_1 < \tau_2$. Toutes les expressions (96 ou 97), (98), (99) de f'_1, F'_1, f'_2, F'_2, déjà obtenues pour ces trois derniers cas plus généraux, conviennent donc pour le cas plus déterminé $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ ou $3\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 4\frac{a_1}{k_1}$; en conséquence elles ont pu servir par substitution, dans les troisièmes membres des promotrices (82), à calculer, pour ce dernier cas (108), les nouvelles valeurs de f'_1, F'_2, et, par suite, de F'_1, f'_2 qui y sont rapportées, et relatives à des valeurs plus considérables de leurs variables, ou dont les limites sont plus grandes, positivement ou négativement.

Les expressions (97), (98), (99), (100), (101), et les expressions (102), (103), (104), (105), peuvent au reste être déduites, comme cas particuliers, des formules générales suivantes, démontrables directement, et où

$$i$$

représente un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5,....

(110) QUAND $i\tau < \tau_2$, ou $i\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$,

$$2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} (2i+1)a_1 \\ (2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} -(2i+1)a_1 \\ -(2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W^{(i)}_{(i)};$$

$$2k_2 f'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 2i\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + (2i-2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 2i\frac{k_2}{k_2}a_1 \\ a_1 - (2i-2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W^{(i-1)}_{(i)}.$$

(111) QUAND $i\tau_1 < \tau_2 < (i+1)\tau_1$, ou $i\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (i+1)\frac{a_1}{k_1}$,

$$2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} (2i+3)a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ (2i+1)a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} -(2i+3)a_1 \\ -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -(2i+1)a_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} V_2 + 4rW_{\prime\prime} + W^{(i+1)}_{(i+1)}; \\ V_2 + W^{(i+1)}_{(i+1)}. \end{matrix} \right.$$

$$2k_2 f'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2a_2 + (2i+2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 2i\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - (2i+2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 2i\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} V_2 - 2W'_{\prime\prime} + 2W^{(i)}_{(i+1)}; \\ V_2 + 2W^{(i)}_{(i+1)}. \end{matrix} \right.$$

(112) QUAND, *idem*, $\left\{ \begin{matrix} \text{et } i' \text{ étant un autre nom-} \\ \text{bre entier} > 0, \text{ et} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} < i \text{ pour les intervalles supérieurs,} \\ < i+1 \text{ pour les intervalles inférieurs,} \end{matrix} \right.$

$$2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} (2i + 2i' + 3)\, a_1 \\ (2i' + 1)\, a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2} a_2 \\ (2i + 2i' + 1)\, a_1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= -2k_1 F_1' \left\{ \begin{matrix} -(2i + 2i' + 3)\, a_1 \\ -(2i' + 1)\, a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2} a_2 \\ -(2i + 2i' + 1)\, a_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} V_2 - 4(i'+1)\, r W_{(i'+2)}^{(i'+2)} + W_{(i+i'+1)}^{(i+i'+1)}, \\ V_2 + 4 i' r W_{(i'+1)}^{(i'-1)} + W_{(i+i'+1)}^{(i+i'+1)}. \end{matrix} \right.$$

$$2k_2 f_2' \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2a_2 + (2i + 2i' + 2)\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 2i'\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 2a_2 + (2i + 2i')\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= -2k_2 F_2' \left\{ \begin{matrix} a_1 - (2i + 2i' + 2)\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 2i'\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - (2i + 2i')\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} V_2 - 2W_{(i'+2)}^{(i'+1)} + 8 i' r W_{(i'+2)}^{(i'-1)} + 2W_{(i+i'+1)}^{(i+i')}, \\ V_2 - 2W_{(i'+1)}^{(i')} + 8(i'-1) r W_{(i'+1)}^{(i'-2)} + 2W_{(i+i'+1)}^{(i+i')} \end{matrix} \right.$$

En effet, la première des formules (110) se démontre au moyen de la première promotrice (82), donnant

$$(113) \left\{ \begin{aligned} & 2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} (2i+1)a_1 \\ (2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1-r}{1+r}\, 2k_1 F_1' \left\{ \begin{matrix} -(2i-1)a_1 \\ -(2i-3)a_1 \end{matrix} \right\} + \\ & \quad + \frac{2r}{1+r}\, 2k_2 f_2' \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2i\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \ \text{ qui est } < a_1 + 2a_2 \ \text{ vu que } \ 2i\dfrac{a_1}{k_1} < 2\dfrac{a_2}{k_2} \\ a_1 + (2i-2)\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \ \text{ qui est } > a_1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Moyennant la substitution ainsi faite, aux limites trouvées pour les variables des f_2' du second membre, des limites plus étendues $\dfrac{a_1 + 2a_2}{a_1}$, nous pouvons y remplacer le $2k_2 f_2'$ par V_2, d'après la formule (96).

Remplaçant aussi

$$F'_1\left\{\begin{matrix}-(2i-1)a_1\\-(2i-3)a_1\end{matrix}\right\}\quad\text{par}\quad -f'_1\left\{\begin{matrix}(2i-1)a_1\\(2i-3)a_1\end{matrix}\right\},$$

qui lui est égal, d'après (80), et faisant successivement $i=1, 2, 3,\ldots$, nous avons, vu (96) $2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}a_1\\0\end{matrix}\right\}=V_1$,

$$\begin{aligned}
&\text{Pour}\quad \tau_1<\tau_2,\quad 2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}3a_1\\a_1\end{matrix}\right\}=\frac{1-r}{1+r}V_1+\frac{2r}{1+r}V_2;\\
&2\tau_1<\tau_2,\quad 2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}5a_1\\3a_1\end{matrix}\right\}=\frac{1-r}{1+r}2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}3a_1\\a_1\end{matrix}\right\}+\frac{2r}{1+r}V_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&i\tau_1<\tau_2,\quad 2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}(2i+1)a_1\\(2i-1)a_1\end{matrix}\right\}=\frac{1-r}{1+r}2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}(2i-1)a_1\\(2i-3)a_1\end{matrix}\right\}+\frac{2r}{1+r}V_2.
\end{aligned}$$

Ajoutant entre elles toutes ces équations, après les avoir multipliées respectivement par

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{i-1},\quad \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{i-2},\ldots,\quad \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{i-i}=1,$$

tous les f'_1 disparaîtront, hors celui qui est dans le premier membre de la dernière, car comme

$$i\tau_1<\tau_2\quad\text{entraîne}\quad (i-1)\tau_1<\tau_2,\ldots,\quad 2\tau_1<\tau_2,\quad \tau_1<\tau_2,$$

le f'_1 du premier membre de chaque équation a la même valeur que le f'_1 de même nom du second membre de la suivante. Et comme on a

$$1+\frac{1-r}{1+r}+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2+\ldots\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{i-1}=\frac{1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^i}{1-\frac{1-r}{1+r}}=\frac{1+r}{2r}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^i\right],$$

il en résulte

$$2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}(2i+1)a_1\\(2i-1)a_1\end{matrix}\right\}=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^i V_1+\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^i\right]V_2,$$

ou précisément la première formule (110).

La deuxième formule (110) s'obtiendra de la deuxième promotrice (82), en mettant, pour le $2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} (2i-1)a_1 \\ (2i-3)a_1 \end{matrix} \right\}$ qu'on aura dans le dernier membre, ce que donne la première (110) avec $i-1$ mis au lieu de i, ce qui est permis, puisque $i\tau_1 < \tau_2$ *entraîne* $(i-1)\tau_1 < \tau_2$.

La première expression (111) se tirera de la première promotrice (82) fournissant

$$(114)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} (2i+3)a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_2 \\ (2i+1)a_1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1-r}{1+r} 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} -(2i+1)a_1 \\ a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -(2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} + \\ & + \frac{2r}{1+r} 2k_2 f'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 + (2i+2)\frac{k_2}{k_1}a_1 & \text{qui est} & < a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 & & \\ a_1 + 2i\frac{k_2}{k_1}a_1 & \text{qui est} & > a_1 \end{matrix} \right\}; \end{aligned} \right.$$

car on peut remplacer le $2k_1 F'_1$ du second membre par sa valeur que donne la première formule (110), sans avoir besoin d'y considérer la limite intermédiaire $a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2$ et, moyennant la substitution qu'on voit que nous avons pu faire, dans le $2k_2 f'_2$, de limites plus larges et qui sont celles de sa variable dans (96) et dans (97), on a, pour ses valeurs, V_2 dans l'intervalle inférieur, et $V_2 + 2W_1$ dans l'intervalle supérieur. Ces substitutions donnent précisément la première expression (111). La deuxième se déduit d'une manière toute semblable de la deuxième promotrice (82), dont le dernier membre contient les mêmes F'_1 et f'_2.

La première expression (112) se déduit de la première promotrice, donnant

$$(115)\left\{\begin{aligned}&2k_1f'_1\left\{\begin{matrix}(2i+2i'+3)a_1\\(2i'+1)a_1+2\dfrac{k_1}{k_2}a_2\\(2i+2i'+1)a_1\end{matrix}\right\}=-\frac{1-r}{1+r}2k_1\mathrm{F}'_1\left\{\begin{matrix}-(2i+2i'+1)a_1\\-(2i'+1)a_1-2\dfrac{k_1}{k_2}a_2\\-(2i+2i'-1)a_1\end{matrix}\right\}+\\&+\frac{2r}{1+r}2k_2f'_2\left\{\begin{matrix}a_1+(2i+2i'+2)\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \quad \text{qui est} < a_1+2a_2+(2i'+2)\dfrac{k_2}{k_1}a_1\\a_1+2a_2+2i'\dfrac{k_2}{k_1}a_1\\a_1+(2i+2i')\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \quad \text{qui est} > a_1+2a_2+(2i'-2)\dfrac{k_2}{k_1}a_1\end{matrix}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Moyennant la substitution de limites, ainsi faite comme conséquence de $2i\frac{a_1}{k_1}<2\frac{a_2}{k_2}$ et de $2(i+1)\frac{a_1}{k_1}>2\frac{a_2}{k_2}$, la partie inférieure et la partie supérieure du $2k_2f'_2$ seront données par la deuxième formule (110) en y faisant successivement $i=i'$ et $i=i'+1$, ce qui est ici permis, puisque, pour ces deux parties, i' est respectivement supposé au plus égal à i et au plus égal à $i-1$; en sorte que $i\tau_1<\tau_2$ entraîne respectivement $i'\tau_1<\tau_2$ et $(i'+1)\tau_1<\tau_2$.

Quant au F'_1, supposons un instant que la première formule (112) que nous voulons démontrer le soit déjà pour une valeur de i' inférieure d'une unité à la valeur indéterminée qu'on lui attribue ici; on aura les deux parties du $-2k_1\mathrm{F}'_1$ en remplaçant i' par $i'-1$ dans le dernier membre de cette formule (112). On trouvera précisément, en réduisant, cette même formule posée.

Or cette première formule (112) est vraie quand on suppose $i'=1$, car on l'établit alors en remplaçant i' par 1 dans ce qui multiplie $\frac{2r}{1+r}$, et en mettant, au lieu de ce qui multiplie $\frac{1-r}{1+r}$, l'expression démontrée (111) de $-2k_1\mathrm{F}'_1\left\{\begin{matrix}-(2i+3)a_1\\-a_1-2\dfrac{k_1}{k_2}a_2\\-(2i+1)a_1\end{matrix}\right\}$. La formule (112) donnant f'_1, et aussi, de la même manière, celle qui donne f'_2, sont donc prouvées pour i' quelconque, dans les limites de 1 à i pour les intervalles inférieurs, et de 1 à $i-1$ inclusivement pour les intervalles supérieurs.

Ces formules générales (112) ne s'appliquent, comme on voit, que jusqu'à

$$f'_1 \left\{ \begin{matrix} (2i+1)a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ (4i+1)a_1 \end{matrix} \right\} \quad \text{et} \quad F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 2a_2 - 2i\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4i\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\},$$

ou jusqu'à des valeurs des variables de f'_1 et F'_2 qui répondent, dans le tableau (94), à

$$t = (2i+1)\tau_1 + 2\tau_2.$$

C'est là, en effet, que s'arrêteraient les chiffres indicatifs de l'ordre de grandeur des temps dans une colonne de ce tableau intitulée $i\tau_1 < \tau_2 < (i+1)\tau_1$, puisque, tant que la relation de τ_1 à τ_2 n'est pas plus déterminée, on ne sait lequel est le plus grand des deux temps $(4i+3)\tau_1$ et $\tau_1 + 4\tau_2$, qui devraient suivre.

Pour les deux cas

$$2\frac{a_1}{k_1} < 2\frac{a_2}{k_2} < 3\frac{a_1}{k_1}, \quad 3\frac{a_1}{k_1} < 2\frac{a_2}{k_2} < 4\frac{a_1}{k_1},$$

plus particuliers que le cas (102) $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2\frac{a_1}{k_1}$ qui les comprend, on a, dans (106) et (108), poussé plus loin que les limites supérieures $3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2$ et $a_1 - 2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1$ relatives à ce cas plus général, celles des variables de f'_1 et F'_2, en appliquant, à partir de là, les promotrices (82), qui offrent, pour le premier cas, dans leurs derniers membres,

$$F'_1 \left\{ \begin{matrix} -a_1 - 4\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -3a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -5a_1 \\ a_1 - 4\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \\ -a_1 - 2\dfrac{k_1}{k_2}a_2 \end{matrix} \right\} \quad \text{et} \quad f'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 + 4a_2 + 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 4\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 6\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\}.$$

En effaçant comme inutiles les limites intermédiaires $a_1 - 4\frac{k_1}{k_2}a_2$ dans F'_1, et $a_1 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1$ dans f'_2, les valeurs successives à mettre pour ces deux fonctions, en commençant par les intervalles du bas, seront fournies par les expressions (102) relatives à $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2\frac{a_1}{k_1}$; et, dans le haut, pour le dernier intervalle de la variable de F'_1, la valeur de cette fonction sera celle qu'on aura déjà calculée pour un intervalle du bas de la formule (106) à établir. On fera de même pour les formules (108), et d'une manière analogue pour celles (107).

Les limites intermédiaires qu'on supprime ainsi dans les derniers membres, et les limites extrêmes qu'on remplace, comme on a vu, par d'autres plus larges, seraient des valeurs de $x + k_1 t$ et $x - k_2 t$, qui dans la *fig.* 89 du n° **8**, répondraient à des lignes de même inclinaison ne présentant pas de marches d'ébranlement parties du point de jonction A_1.

En ayant égard aux observations qu'on vient de faire, et en ayant toujours soin, lorsqu'on opère des substitutions dans les derniers membres des formules (82) que nous appelons *promotrices*, de n'employer, parmi les formules déjà établies, que celles qui sont relatives au cas où l'on se trouve, ou *à ceux dans lesquels il est compris* d'après le tableau (109), on évitera toute erreur dans ces recherches naturellement compliquées, et l'on pourra obtenir, aussi loin qu'on voudra, les valeurs des quatre fonctions F', f', pour des relations de grandeur de plus en plus déterminées entre $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$ et $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$.

10. *Suite de la solution pour deux barres de grosseurs et de matières différentes. — Calcul des vitesses et des compressions aux instants successifs.* — Ayant, par les formules (96) à (108), et autres analogues, les valeurs des quatre fonctions f'_1, f'_2, F'_1, F'_2 pour les grandeurs diverses de leurs variables, on peut immédiatement en déduire celles des vitesses v et des compressions j :

$$(116)\quad \begin{cases} v_1 = k_1 f'_1(x + k_1 t) - k_1 F'_1(x - k_1 t), & j_1 = -f'_1(x + k_1 t) - F'_1(x - k_1 t), \\ v_2 = k_2 f'_2(x + k_2 t) - k_2 F'_2(x - k_2 t), & j_2 = -f'_2(x + k_2 t) - F'_2(x - k_2 t), \end{cases}$$

pour des valeurs *déterminées* de x et de t, en ayant seulement l'atten-

tion, lorsque ces valeurs rendent $x \pm k_1 t$ ou $x \pm k_2 t$ justement égales aux limites où la grandeur d'une des fonctions change brusquement, de faire cesser l'ambiguïté en prenant successivement des valeurs de x ou de t infiniment peu au-dessous ou infiniment peu au-dessus de celles qu'on voulait leur assigner.

Mais comme il s'agit ici de déterminer complétement dans quelles limites successives de temps écoulé, et de situation sur les deux barres, les vitesses et les compressions prennent telles ou telles valeurs, nous construirons des tableaux ou diagrammes semblables à ceux qui ont été donnés ci-dessus, et principalement au (89) du n° 8, en retranchant les lignes inclinées *ponctuées* qui sont inutiles, avons-nous dit, quand les deux barres n'avaient pas de compressions au moment de leur jonction; et nous inscrirons dans leurs cases, comme nous avons fait au n° 5, pour le cas où les deux barres étaient de même section et de même matière, les expressions de

$$2k_1 f'_1(x + k_1 t), \quad 2k_2 f'_2(x + k_2 t),$$
$$2k_1 F'_1(x - k_1 t), \quad 2k_2 F'_2(x - k_2 t),$$

tirées des formules (96) à (111), et relatives aux valeurs de leurs variables, limitées respectivement par celles qui sont cotées sur les deux lignes descendantes parallèles, et sur celles qui sont cotées sur les deux lignes ascendantes parallèles intérieures ou extérieures, entre lesquelles la case est comprise.

Voici l'un de ces diagrammes. Dans chacune des cases on a inscrit l'expression du $2k_1 f'_1$ ou $2k_2 f'_2$ relatif à tous ses points, et, *au-dessous*, celle du $2k_1 F'_1$ ou $2k_2 F'_2$.

Par exemple : 1° Dans le triangle, dans les trois parallélogrammes et dans le petit trapèze ainsi que dans le petit triangle compris entre les lignes descendantes

$$x + k_2 t = a_1 + 2a_2 \quad \text{et} \quad x + k_2 t = a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1} a_1,$$

on a, pour valeur de $2k_2 f'_2$, écrit $V_2 + 2W_1$ parce que la formule (97) relative au cas $\tau_1 < \tau_2$, qui comprend le cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, donne

bien cette valeur à

$$2k_2 f_2' \left\{ \frac{a_1 + 2a_2 + 2\dfrac{k_2}{k_1} a_1}{a_1 + 2a_2} \right\}.$$

(117) Cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$.

2° Dans le troisième de ces parallélogrammes, ainsi que dans le petit triangle et dans l'autre parallélogramme, qui sont compris entre les lignes ascendantes

$$x - k_2 t = a_1 - 6\frac{k_1}{k_2} a_1 \quad \text{et} \quad x - k_2 t = a_1 - 2a_2,$$

on a écrit, pour $2k_2 F_2'$, la valeur tirée de la formule (105) relative au

cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, qui donne

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = -V_2 - 2W'''_{IV}.$$

C'était bien en effet de cette formule (105) qu'il fallait la tirer, et non pas de la formule (101) qui est relative à $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$, et qui eût donné

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \end{matrix} \right\} = -V_2 + 4rW'_{III}.$$

3° Dans le trapèze, les deux parallélogrammes et le triangle compris entre les lignes montantes $a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1$ et $a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1$, on a tiré le $2k_2 F'_2$ de la formule (100), car elle est relative à $3\tau_1 < \tau_2$ qui comprend $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, et cette formule donne

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = -V_2 - 2W''_{III}.$$

Et ainsi des autres.

En formant, comme on a dû le faire, des diagrammes semblables relatifs aux autres cas

$$2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1, \quad 3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1, \quad 2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1,$$

il a fallu de même :

Pour $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_2$, entre les lignes ascendantes

$$x_1 - k_2 t = a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \quad \text{et} \quad a_1 - 2a_2,$$

et aussi, entre les lignes descendantes

$$x + k_1 t = 5a_1 \quad \text{et} \quad a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2,$$

tirer les

$$2k_2 F'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 - 4\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 \end{matrix}\right\} = -V_2 - 2W''_{'''},$$

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{matrix} a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2} a_2 \\ 5a_1 \end{matrix}\right\} = V_2 + W'''_{'''},$$

de la formule (101), et non de la formule (99) relative à $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$, qui eût donné $-V_2$ et V_1.

Et, au contraire, pour les cas $3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1$ et $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$, il a fallu prendre

$$2k_2 F'_2 \left\{\begin{matrix} a_1 - 4\dfrac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 \end{matrix}\right\} = -V_2$$

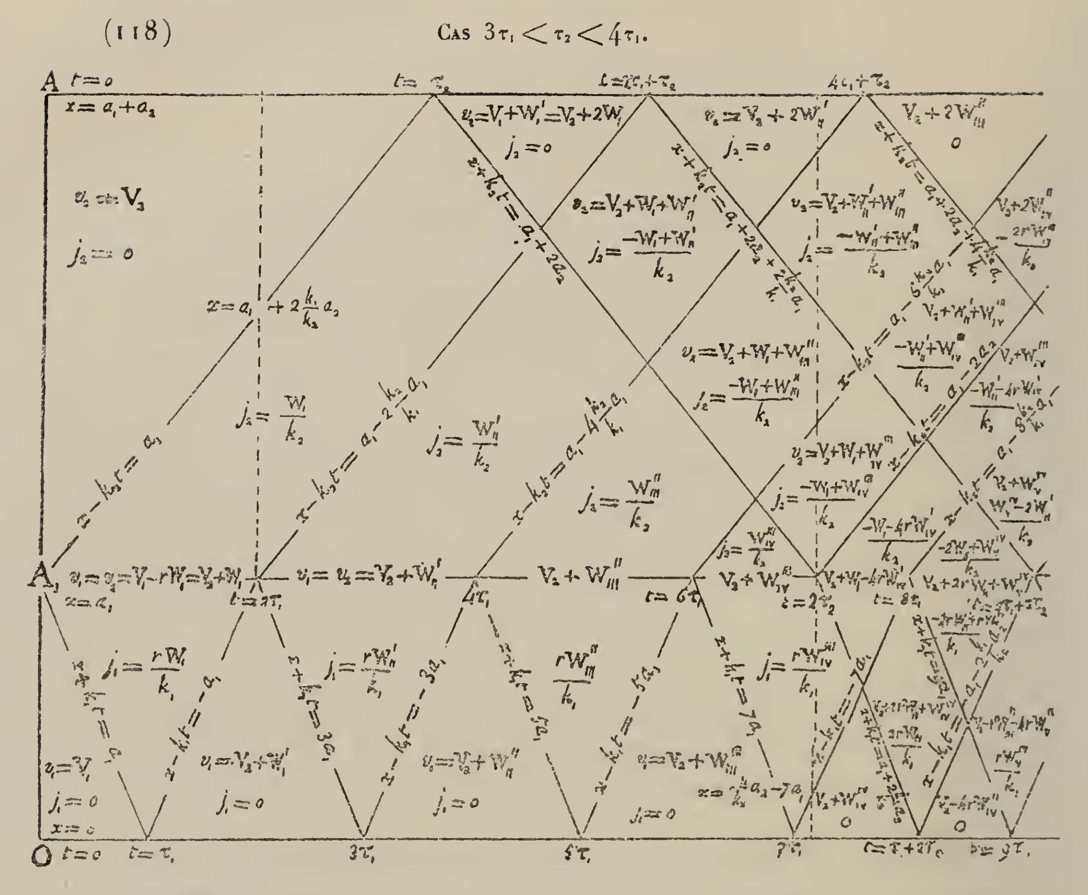
et

$$2k_1 f'_1 \left\{\begin{matrix} 5a_1 \\ a_1 + 2\dfrac{k_1}{k_2} a_2 \end{matrix}\right\} = V_1,$$

tirés de la formule (99) relative au cas $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$, vu qu'il comprend ces deux-ci, et non pas $-V_2 - 2W''_{'''}$ et $V_2 + W'''_{'''}$ qu'eût donnés la formule (101) relative à $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$.

Retranchant les $2kF'$ des $2kf'$ des diverses cases, puis divisant par 2 pour avoir les vitesses v, et en les ajoutant après les avoir pris en signe contraire, puis divisant par $2k$ pour avoir les compressions j, conformément aux expressions (116) de v_1, j_1, v_2, j_2, nous avons obtenu, après diverses réductions fondées sur la définition (95) des fonctions W, les quatre diagrammes ci-dessous (118), (119), (120), (121) des valeurs de vitesses et de compressions.

(118) Cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$.

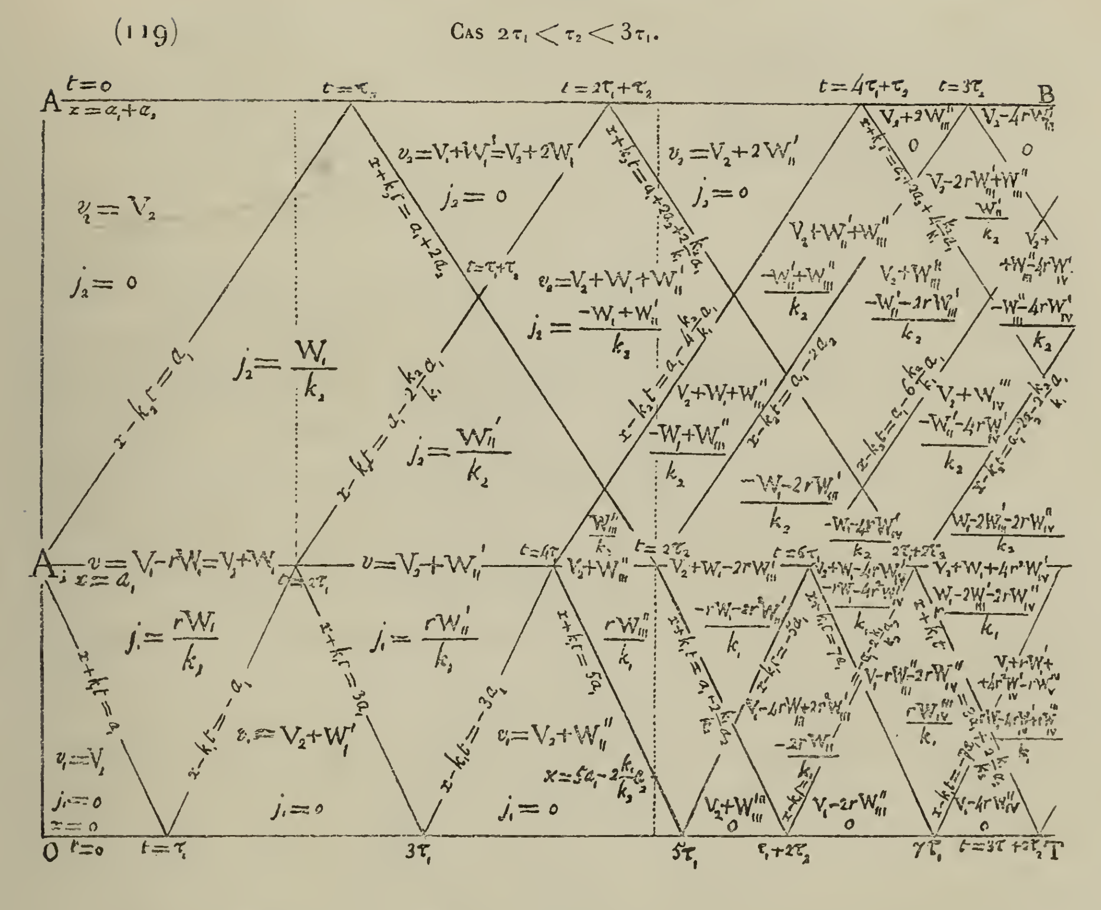


Dans ces diagrammes, on voit que pour les cases du haut et du bas, qui ne sont séparées que par l'horizontale tirée du point de jonction A_1, les vitesses v_1, v_2 sont égales, ce qui doit être à cause de la contiguïté des deux barres; et j_1 ne diffère de j_2 que par le facteur $r\frac{k_2}{k_1}$, ce qui doit être aussi, d'après la deuxième condition définie (65) $E_1\omega_1\frac{du_1}{dx} = E_2\omega_2\frac{du_2}{dx}$. Cette double concordance offre un moyen de vérification.

On voit aussi que l'état des deux barres *supposées rester unies* ne redevient pas le même au bout du temps

$$t = 2\tau_1 + 2\tau_2,$$

(119) CAS $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$.



et ne recommence pas périodiquement comme on a vu qu'elles faisaient quand elles sont de même section, à moins qu'on n'ait

(122) $$r = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{M_2}{a_2}k_2 = \frac{M_1}{a_1}k_1$$

ou égalité des masses des portions des deux barres ébranlées ou comprimées pendant un même temps. C'est seulement, en effet, lorsque cette condition est remplie, que tous les W avec accents supérieurs s'évanouissent, et que, pour $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$, les vitesses v_1, v_2 redeviennent uniformément V_1 et V_2, avec des compressions j_1, j_2 nulles.

(120) CAS $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$.

(121) CAS $2\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1$.

Ces diagrammes présentent la solution complète, jusqu'aux instants marqués, du problème du mouvement longitudinal d'une barre composée de deux parties prismatiques homogènes de sections et de matières différentes.

Les divers résultats de cette solution en termes finis satisfont, au reste, aux formules générales (69) de la solution en série transcendante.

Par exemple :

1° Pour l'instant $t = \tau_1$, où les deux diagrammes (118), (119) relatifs au cas général $2\tau_1 < \tau_2$ donnent, eu égard à $r = \frac{M_2\tau_1}{M_1\tau_2}$:

$$(123)\quad \begin{cases} v_1 = \dfrac{du_1}{dt} = V_2 + W_1 = \dfrac{V_1 + rV_2}{r+1} = \dfrac{\dfrac{M_1}{\tau_1}V_1 + \dfrac{M_2}{\tau_2}V_2}{\dfrac{M_1}{\tau_1} + \dfrac{M_1}{\tau_2}} \quad \text{de} \quad x = 0 \text{ à } x = a_1, \\ v_2 = \dfrac{du_2}{dt} = \text{la même chose de } x = a_1 \text{ à } x = a_1 + k_2\tau_1 = a_1 + \dfrac{\tau_1}{\tau_2}a_2, \\ v_2 = \dfrac{du_2}{dt} = V_2 \quad \text{de} \quad x = a_1 + \dfrac{\tau_1}{\tau_2}a_2 \quad \text{à} \quad x = a_1 + a_2, \end{cases}$$

et où les formules transcendantes (69) donnent

$$(124)\qquad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=\tau_1} = \sum mAX_1 \cos m\tau_1,$$

$$(125)\qquad \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=\tau_1} = \sum mAX_2 \cos m\tau_1,$$

si l'on opère de la même manière qu'on a fait pour déterminer le coefficient A par élimination ou disparition de tous les termes de chaque $\sum$ hors un, c'est-à-dire si l'on égale l'expression (124) de $\frac{du_1}{dt}$ à celle (123) de v_1, et l'expression (125) de $\frac{du_2}{dt}$ successivement à la première et à la seconde de celles (123) de v_2, et si l'on ajoute entre elles les trois équations qui en résultent, multipliées respectivement par

$$\frac{M_1}{a_1}X_1\,dx,\quad \frac{M_2}{a_2}X_2\,dx,\quad \frac{M_2}{a_2}X_2\,dx,$$

et intégrées dans les limites de (123), on a une équation nouvelle qui, eu égard à (71) ou à

$$\frac{M_1}{a_1}\int_0^{a_1} X_1 X'_1\,dx + \frac{M_2}{a_2}\int_{a_1}^{a_1+\frac{\tau_1}{\tau_2}a_2} X_2 X'_2\,dx + \frac{M_2}{a_2}\int_{a_1+\frac{\tau_1}{\tau_2}a_2}^{a_1+a_2} X_2 X'_2\,dx = 0,$$

faisant disparaître tous les termes des séries hors un de chaque, se réduit à

$$m\mathrm{A}\cos m\tau_1 \cdot \left(\frac{M_1}{a_1}\int_0^{a_1} X_1^2\,dx + \frac{M_2}{a_2}\int_{a_1}^{a_1+a_2} X_2^2\,dx\right) =$$

$$= \frac{M_1}{a_1}\,\frac{\frac{M_1}{\tau_1}V_1 + \frac{M_2}{\tau_2}V_2}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}}\int_0^{a_1} X_1\,dx + \frac{M_2}{a_2}\,\frac{\frac{M_1}{\tau_1}V_1 + \frac{M_2}{\tau_2}V_2}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}}\int_{a_1}^{a_1+\frac{\tau_1}{\tau_2}a_2} X_2\,dx$$

$$+ \frac{M_2}{a_2}\int_{a_1+\frac{\tau_1}{\tau_2}a_2}^{a_1+a_2} X_2\,dx,$$

et devient une identité, si l'on met pour A sa valeur (69) et si on effectue les intégrations.

2° On trouve la même identité pour

$$t = 2\tau_1 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du_1}{dt} = V_2 + W'_t = V_1 - \frac{2\frac{M_2}{\tau_2}}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}}(V_1 - V_2) \quad \text{de} \quad x = 0 \quad \text{à} \quad x = a_1, \\ &\frac{du_2}{dt} = \frac{\frac{M_1}{\tau_1}V_1 + \frac{M_2}{\tau_2}V_2}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}} \quad \text{de } x = a_1 \text{ à } x = a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 = a_1 + 2\frac{\tau_1}{\tau_2}a_2, \\ &\frac{du_2}{dt} = V_2 \quad \text{de} \quad x = a_1 + 2\frac{\tau_1}{\tau_2}a_2 \quad \text{à} \quad x = a_1 + a_2, \end{aligned}\right.$$

et généralement pour toutes les valeurs contemporaines, soit des vitesses v_1, v_2, soit des compressions j_1, j_2 des diagrammes ci-dessus, comparées aux expressions transcendantes (69) particularisées en donnant à t les valeurs qui y répondent.

11. *Conséquences, en ce qui regarde le mouvement des deux barres après l'instant de leur choc, leur séparation, et les vitesses à l'instant où elle s'opère.* — Rappelons-nous les notations (59)

$$\mathrm{m}_1 a_1 = \mathrm{M}, \quad \mathrm{m}_2 a_2 = \mathrm{M}_2, \quad r = \frac{\mathrm{m}_2 k_3}{\mathrm{m}_1 k_1}.$$

On voit tout d'abord, par les parties de gauche des quatre diagrammes (118) à (121), qu'à dater de l'instant $t = 0$ où deux barres de longueurs a_1, a_2 se heurtent sans compression initiale, l'ébranlement se propage graduellement dans chacune, en sorte que, de part et d'autre du point $x = a_1$ de leur jonction, deux portions $k_1 t$, $k_2 t$ de longueurs croissantes prennent une vitesse

$$(126) \qquad v_1 = v_2 = \mathrm{V}_2 + \mathrm{W}_{,} = \frac{\mathrm{V}_1 + r\mathrm{V}_2}{1+r} = \frac{\mathrm{m}_1 k_1 \mathrm{V}_1 + \mathrm{m}_2 k_2 \mathrm{V}_2}{\mathrm{m}_1 k_1 + \mathrm{m}_2 k_2},$$

au lieu des vitesses V_1, V_2 qu'elles possédaient, et en même temps des compressions

$$(127) \qquad \begin{cases} j_1 = \dfrac{r\mathrm{W}_{,}}{k_1} = \dfrac{r(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2)}{(1+r)k_1} = \dfrac{\mathrm{m}_2 k_2}{\mathrm{m}_1 k_1 + \mathrm{m}_2 k_2} \dfrac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2}{k_1}, \\[2ex] j_2 = \dfrac{\mathrm{W}_{,}}{k_2} = \dfrac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2}{(1+r)k_2} = \dfrac{\mathrm{m}_1 k_1}{\mathrm{m}_1 k_1 + \mathrm{m}_2 k_2} \dfrac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2}{k_2}. \end{cases}$$

Mais, après le temps

$$\tau_1 = \frac{a_1}{k_1} \quad \text{qui est} \quad < \frac{a_2}{k_2},$$

la portion relative à la deuxième barre continue seule de croître. Celle de la première, qui en a embrassé la totalité, décroît de k_1 par unité de temps à partir de l'extrémité libre $x = 0$, et est remplacée par une portion ayant

$$(128) \qquad \begin{cases} \text{Une vitesse } v_1 = \mathrm{V}_2 + \mathrm{W}'_1 = \mathrm{V}_1 - 2r\mathrm{W}_1 \\[1ex] \qquad = \mathrm{V}_1 - 2r\dfrac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2}{1+r} = \mathrm{V}_1 - \dfrac{2\mathrm{m}_2 k_2}{\mathrm{m}_1 k_1 + \mathrm{m}_2 k_2}(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2), \\[1ex] \text{Une compression } j_1 = 0, \end{cases}$$

en sorte qu'au bout d'un second temps τ_1, ou pour

$$t = 2\tau_1 = 2\frac{a_1}{k_1},$$

toute la barre a_1 se trouve avoir cette vitesse (128) sans aucune compression, tandis que la seconde possède encore à partir de leur point de contact

$$(129)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Une vitesse}\quad v_2 = \dfrac{V_1 + rV_2}{1+r}\quad \text{et une compression}\quad j_2 = \dfrac{V_1 - V_2}{(1+r)k_2}, \\ \text{sur une longueur} \left\{\begin{array}{lll} 2\dfrac{k_2}{k_1}a_1 & \text{si} & 2\dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2}, \\ 2k_2\left(\dfrac{a_2}{k_2} - \dfrac{a_1}{k_1}\right) & \text{si} & \dfrac{a_1}{k_1} < \dfrac{a_2}{k_2} < 2\dfrac{a_1}{k_1}; \end{array}\right. \\ \text{et, sur le reste, une vitesse } V_2 \text{ dans le premier cas, et } V_1 \text{ dans le second,} \\ \quad \text{avec } j_2 = 0. \end{array}\right.$$

Pour déterminer ce que deviennent les barres après cet instant

$$(130)\qquad t = 2\tau_1 = 2\frac{a_1}{k_1},$$

où le son a parcouru aller et retour celle des deux barres qui exige pour cela le moins de temps et qui est supposée a_1, il faut distinguer trois cas :

$$r = 1,\quad r > 1,\quad r < 1.$$

1° *Cas* $r = 1$ *ou* $m_2 k_2 = m_1 k_1$. — Alors, comme toutes les quantités désignées par (95) W avec un ou plusieurs accents *supérieurs* s'évanouissent, on a

$$\text{A l'instant } t = 2\tau_1,\quad v_1 = V_2 \text{ dans toute la première barre};$$

ensuite, à l'endroit du choc ou pour $x = a_1$,

$$\text{De}\quad t = 2\tau_1 \quad \text{à} \quad t = 2\tau_2 \left\{\begin{array}{l} v_1 = V_2,\ j_1 = 0 \text{ dans toute la première barre,} \\ v_2 = V_2,\ j_2 = 0 \text{ sur une portion contiguë de la deuxième barre.} \end{array}\right.$$

Les deux barres, pendant ce laps de temps $2\tau_2 - 2\tau_1$, marchent juxtaposées sans aucune action l'une sur l'autre.

A l'instant $t = 2\tau_2$ où le son a parcouru aller et retour la deuxième barre, on a dans les deux, au point de jonction $x = a_1$,

$$v_1 = V_2, \quad v_2 = V_2 + W_{,} = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1 + r}.$$

La seconde vitesse excède la première et tend à séparer les deux barres. Et si cependant elles continuaient à être unies, on aurait après cet instant

$$v_1 = v_2 = V_2 + W_{,},$$

$$j_1 = -\frac{rW_{,}}{k_1}, \quad j_2 = -\frac{W_{,}}{k_2}.$$

Ces compressions sont négatives, et par conséquent impossibles à un pareil endroit.

Les deux barres se sépareront et s'éloigneront donc l'une de l'autre à partir de l'instant $t = 2\tau_2$.

Ainsi, dans ce premier cas,

$$r = 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 = m_1 k_1,$$

ou *lorsque la masse comprimée ou ébranlée pendant un temps quelconque est la même dans les deux barres* de sections et de matières différentes, *elles se comportent absolument comme* on a vu que faisaient *deux barres de même matière et d'égale section.*

Et l'on a pour les vitesses de translation à l'instant $t = 2\tau_2$ de la séparation, et même dès l'instant $t = 2\tau_1$,

(131) $$U_1 = V_2, \quad U_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_2}(V_1 - V_2).$$

2° *Cas* $r > 1$ *ou* $m_2 k_2 > m_1 k_1$. — Alors les quantités (95) W avec un nombre *impair* d'accents supérieurs sont négatives. Les deux barres ne peuvent plus rester unies passé l'instant

$$t = 2\tau_1 = 2\frac{a_1}{k_1};$$

car ensuite elles auraient, à l'endroit de leur jonction, des compres-

sions négatives

$$j_1 = r\frac{W'_{\prime\prime}}{k_1}, \quad j_2 = \frac{W'_{\prime\prime}}{k_2},$$

ce qui est impossible. Elles se sépareront donc alors.

Et l'on aura pour la vitesse de toute la première barre ainsi séparée

$$(132)\qquad U_1 = V_2 - \frac{r-1}{r+1}(V_1 - V_2) = V_1 - \frac{2r}{1+r}(V_1 - V_2).$$

Mettant pour r sa valeur $\frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$, et déduisant de U_1 la vitesse U_2 du centre de gravité de la deuxième barre par le théorème

$$M_1 U_1 + M_2 U_2 = M_1 V_1 + M_2 V_2,$$

on a les expressions suivantes :

$$(133)\qquad \begin{cases} U_1 = V_2 - 2\dfrac{m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}(V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + 2\dfrac{M_1}{M_2}\dfrac{m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}(V_1 - V_2). \end{cases}$$

La seconde pouvait être obtenue directement au moyen des vitesses des deux parties de la seconde barre à l'instant $t = 2\tau_1$ de la séparation, car on a, ainsi, les deux expressions :

Si $2\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$,

$$U_2 = \frac{1}{a_1}\left[2\frac{k_2}{k_1}a_1\left(V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r}\right) + \left(a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1\right)V_2\right];$$

Si $\frac{a_2}{k_2} < 2\frac{a_1}{k_1}$,

$$U_2 = \frac{1}{a_2}\left[\left(2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1\right)\left(V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r}\right) + \left(2\frac{k_2}{k_1}a_1 - a_2\right)\left(V_2 + 2\frac{V_1 - V_2}{1+r}\right)\right],$$

se réduisant l'une comme l'autre à

$$(134)\qquad U_2 = V_2 + 2\frac{a_1 k_2}{a_2 k_1}\frac{V_1 - V_2}{1+r},$$

qui est la même chose que la seconde (133).

On reconnaît tout d'abord que ces expressions (133) de U_1, U_2 ne sauraient être générales ou s'appliquer à tous les rapports possibles r de $m_2 k_2$ à $m_1 k_1$. En effet, en les prenant sous les formes (132), (134), on verra que la seconde est plus petite que la première, quand

$$r < 1 - 2\frac{a_1 k_2}{a_2 k_1}, \quad \text{ou} \quad r < 1 - 2\frac{\tau_1}{\tau_2};$$

en sorte que la barre qui va derrière marchera plus vite que le centre de gravité de celle qui va devant; et, en supposant même qu'elles se fussent séparées, elles se rejoindraient. Mais il suffit, comme on va voir, que r soit < 1 pour que les expressions (133) ne soient plus celles des vitesses après le choc.

3° *Cas* $r < 1$ *ou* $m_2 k_2 < m_1 k_1$. — Alors tous les W sont positifs, en sorte que, d'après les quatre diagrammes (118) à (121), les j_1 et j_2 sont positifs de part et d'autre du point de contact $x = a_1$, et les barres, continuant à se presser l'une l'autre, restent unies jusqu'à l'instant

$$t = 2\tau_2 = 2\frac{a_2}{k_2}.$$

Mais, si leur union continuait passé ce dernier instant, on voit que les j_1, j_2 seraient négatifs.

Elles se sépareront donc à cet instant $t = 2\tau_1$.

Nous pouvons à cet égard généraliser, par les formules (112) et (114) relatives à des rapports indéfinis de grandeur de τ_2 à τ_1, les résultats des quatre diagrammes.

Soit n la partie entière du nombre de fois que $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$ contient $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$, en sorte que

$$(135) \qquad n\tau_1 < \tau_2 < (n+1)\tau_1,$$

ce qu'on peut représenter au moyen de l'un ou de l'autre des deux premiers diagrammes (118) et (119) en y écrivant, sur les horizontales partant de A_1 et de O, et sur quatre des lignes inclinées qu'elles compren-

nent

(136)

$t = 2n\tau_1$ et $(2n+1)\tau_1$; $x+k_1t=(2n+1)a_1$ et $(2n+3)a_1$; $x-k_1t=-(2n-1)a_1$ et $-(2n+1)a_1$;

au lieu de

$t=6\tau_1, \quad 7\tau_1; \quad x+k_1t=7a_1, \quad 9a_1; \quad x-k_1t=-5a_1, \quad -7a_1$ dans (118);

$4\tau_1, \quad 5\tau_1; \quad 5a_1, \quad 7a_1; \quad -3a_1, \quad -5a_1$ dans (119).

Dans la case triangulaire située à droite et au-dessous du point $t = 2\tau_2$, et qui est comprise entre l'horizontale de A_1 et les lignes inclinées $x + k_1 t = a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2$ et $x - k_1 t = -(2n+1)a_1$, nous aurons d'après les formules (114) et (112)

$$2k_1 f'_1(x+k_1t) = 2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}(2n+3)a_1\\ a_1+2\dfrac{k_1}{k_2}a_2\end{matrix}\right\} = V_2 + 4rW_n + W^{(n+1)}_{(n+1)},$$

$$2k_1 F'_1(x+k_1t) = 2k_1 F'_1\left\{\begin{matrix}-(2n+1)a_1\\ -(2n-1)a_1\end{matrix}\right\} = -V_2 - W^{(n)}_{(n)}.$$

D'où, pour la compression j_1,

$$2k_1 j_1 = -2k_1 f'_1 - 2k_1 F'_1 = -4rW_n + W^{(n)}_{(n+1)}(r - 1 + r + 1),$$

ou

$$(137) \qquad j_1 = -\frac{r(V_1 - V_2)(1-r)}{(1+r)^2 k_1}\left[\frac{2}{1-r} - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-1}\right].$$

Et l'on trouverait la même chose, comme cela doit être sauf le facteur $r\frac{k_1}{k_2}$, pour j_2 dans la case trapèze à droite et au-dessus du point $t = 2\tau_2$, en tirant, pour l'obtenir, de la formule (97) et de la formule (115), les valeurs de

$$2k_2 f'_2\left\{\begin{matrix}a_1+2a_2+2\dfrac{k_2}{k_1}a_1\\ a_1+2a_2\end{matrix}\right\}, \quad 2k_2 F'_2\left\{\begin{matrix}a_1-(2n+2)\dfrac{k_2}{k_1}a_1\\ a_1-2a_2\end{matrix}\right\}.$$

Or le binôme entre crochets de cette expression (137) de j_1 est positif, puisque r est positif et < 1. Il s'ensuit que si les barres restaient unies après l'instant $t = 2\tau_2$, leurs compressions, à l'endroit où elles se joignent, *seraient négatives*.

Donc, quel que soit n ou $\frac{\tau_1}{\tau_2} > 1$, quand les deux barres ne se sont pas séparées à l'instant $t = 2\tau_1$, c'est-à-dire quand $r < 1$ ou

$$m_2 k_2 < m_1 k_1,$$

elles se sépareront à l'instant

$$t = 2\tau_2 = 2\frac{a_2}{k_2}.$$

La séparation a lieu lorsque l'ébranlement ou le son a parcouru aller et retour celle des deux barres où la portion ébranlée pendant chaque instant a le moins de masse.

Si c'est a_1, c'est-à-dire celle des deux dont le son met le moins de temps à parcourir toute la longueur, les vitesses de translation au moment de la séparation sont celles (133) du cas $r > 1$. Si c'est l'autre, on a des vitesses différentes, que nous allons pouvoir calculer pour toute valeur de n au moyen des formules déjà employées (112) et (114) applicables à des rapports indéfinis de grandeur de τ_2 à τ_1.

En effet, la supposition (135) $n\tau_1 < \tau_2 < (n+1)\tau_1$ se subdivise en deux autres plus particulières :

$$(138)\qquad \begin{cases} 1^{\text{re}} & (2n+1)\tau_1 < 2\tau_2 < (2n+2)\tau_1, \\ 2^{\text{e}} & 2n\tau_1 < 2\tau_2 < (2n+1)\tau_1, \end{cases}$$

figurées respectivement par les diagrammes (118) et (119) avec les substitutions (136). Or, dans la première, la barre a_1 se compose, à l'instant $t = 2\tau_2$:

1° D'une partie inférieure, de longueur

$$x = k_1 t - (2n+1)a_1 = 2\frac{k_1}{k_2}a_2 - (2n+1)a_1$$

dont la ligne figurative (ponctuée) est comprise, au diagramme (118), dans une case triangulaire pour laquelle on a

$$2k_1 f_1'(x + k_1 t) = \quad 2k_1 f_1' \begin{Bmatrix} a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ (2n+1)a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)},$$

$$-2k_1 F_1'(x - k_1 t) = -2k_1 F_1' \begin{Bmatrix} -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -(2n+1)a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)},$$

d'où

$$(139)\qquad v_1 = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)} = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1}(V_1 - V_2);$$

2° D'une partie supérieure, de longueur

$$a_1 - \left[2\frac{k_1}{k_2}a_2 - (2n+1)a_1\right] = (2n+2)a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2$$

dont la ligne ponctuée figurative est comprise, toujours au diagramme (118), dans une case trapèze pour laquelle on a

$$2k_1 f_1'(x + k_1 t) = 2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ (2n+1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)},$$

$$-2k_1 F_1'(x - k_1 t) = -2k_1 F_1' \left\{ \begin{matrix} -(2n+1)a_1 \\ -(2n-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n)}^{(n)},$$

d'où

$$(140)\quad v_1 = V_2 + \frac{1}{2}\left[W_{(n+1)}^{(n+1)} + W_{(n)}^{(n)}\right] = V_2 + W_{(n+1)}^{(n)}\frac{1-r+1+r}{2} = V_2 + \frac{(1-r)^n(V_1 - V_2)}{(1+r)^{n+1}}.$$

Dans la deuxième supposition (138), $2n\tau_1 < 2\tau_2 < (2n+1)\tau_1$, on voit par le diagramme (119) que la barre a_1 se divise, à l'instant $t = 2\tau_2$:

1° En une partie inférieure, de longueur

$$-2\frac{k_1}{k_2}a_2 + (2n+1)a_1$$

comprise dans une case triangulaire pour laquelle on a

$$2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} (2n+1)a_1 \\ (2n-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n)}^{(n)},$$

$$-2k_1 F_1' \left\{ \begin{matrix} -(2n+1)a_1 \\ -(2n-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n)}^{(n)},$$

$$(141)\qquad v_1 = V_2 + W_{(n)}^{(n)} = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n (V_1 - V_2);$$

2° En une partie supérieure, de longueur

$$2\frac{k_1}{k_2}a_2 - 2na_1$$

comprise dans une case trapèze pour laquelle on trouve comme (140)

$$(142)\qquad v_1 = V_2 + \frac{(1-r)^n (V_1 - V_2)}{(1+r)^{n+1}}.$$

Multipliant la longueur de chaque partie de la barre a_1 par la vitesse (139) ou (140), (141) ou (142) qui y répond, et divisant par la longueur totale a_1 l'on obtient, dans l'une comme dans l'autre des deux suppositions (138), la même valeur de la vitesse du centre de gravité de la barre a_1; ce qui vient de ce que la barre a_2 se compose de parties en même nombre $n+1$ ayant leurs longueurs nécessairement exprimées de même ainsi que les vitesses qui y répondent. On a ainsi l'expression suivante de U_1. Celle qui est écrite à la suite pour la vitesse U_2 du centre de gravité de la barre a_2 n'est que ce qui résulte du principe de la conservation de la quantité totale du mouvement.

$$(143)\quad \begin{cases} U_1 = V_2 + \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n \left(1 - 2r\dfrac{\dfrac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n}{1+r}\right)(V_1 - V_2) = \\ \quad = V_2 + \left(\dfrac{m_1 k_1 - m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}\right)^n \left[1 - \dfrac{2 m_2 k_2}{m_1 k_2 + m_2 k_2}\left(\dfrac{\tau_2}{\tau_1} - n\right)\right](V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \dfrac{M_1}{M_2}(V_1 - U_1). \end{cases}$$

D'après la définition (135) de n, le binôme $\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n$, ou $\frac{\tau_2}{\tau_1} - n$, qui entre dans l'expression de U_1, est toujours positif et < 1; et comme $\frac{2r}{1+r}$ est aussi < 1, U_1 est toujours égal à V_2 plus une quantité positive qui, pour des valeurs déterminées de r et de n, est à son maximum quand le même binôme est nul, ou quand le temps de parcours du son d'un bout à l'autre de a_2 est un multiple exact de son parcours d'un bout à l'autre de a_1. Alors on a simplement

$$(144)\quad \begin{cases} U_1 = V_2 + \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n (V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \dfrac{M_1}{M_2}\left[1 - \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n\right](V_1 - V_2). \end{cases}$$

Lorsqu'on a

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{k_1} = \frac{a_2}{k_2},$$

il faut, dans les formules (133) des vitesses après le choc, du cas $r > 1$, remplacer k_1, k_2, par a_1, a_2, et, dans celles (143) du cas $r < 1$, faire $n = 1$, $\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} = 1$, $r = \frac{M_2}{M_1}$. On tire ainsi des unes comme des autres

$$(145) \quad U_1 = V_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2), \quad U_2 = V_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2);$$

et les compressions résidues sont nulles, comme on peut voir par le troisième ou le quatrième diagramme (120) ou (121) du n° **10**, en faisant confondre, sur la ligne $x = a_1$, les points $t = 2\tau_1$ et $t = 2\tau_2$.

Ce sont les formules de la théorie ordinaire, qu'on trouve exposée dans tous les livres traitant du choc des corps parfaitement élastiques.

Ces formules connues (145), comme on voit, ne sont vraies que lorsque le son met le même temps à parcourir les deux barres dans toute leur longueur; et le choc ne cesse qu'après deux fois ce temps, quand les deux barres, graduellement comprimées d'un bout à l'autre à partir du point de rencontre pendant le premier temps, ont perdu leur compression pendant un second temps qui lui est égal, en commençant par leurs extrémités libres.

Dans tout autre cas il faut recourir aux formules nouvelles (133), (143) applicables pour $r > 1$, $r < 1$, et comprenant celles (131) relatives à $r = 1$.

12. *Preuve que les deux barres, après s'être séparées soit à l'instant $t = 2\tau_1$, soit à l'instant $t = 2\tau_2$, ne se rejoindront pas, ou que la compression qu'elles conservent ne déterminera pas, par détente ou par vibrations, un contre-coup ou une nouvelle rencontre de leurs extrémités.* — Déterminons, pour nous en assurer, ce que deviendront les deux barres après leur séparation, en les traitant comme barres isolées, au moyen de diagrammes tels que (23) ou (24) du n° **3**.

Dans le cas $r > 1$ qui est celui de la séparation à l'instant $t = 2\tau_1$, la barre a_1 possède d'un bout à l'autre une vitesse (128)

$$(146) \qquad v_1 = V_2 + W_1'$$

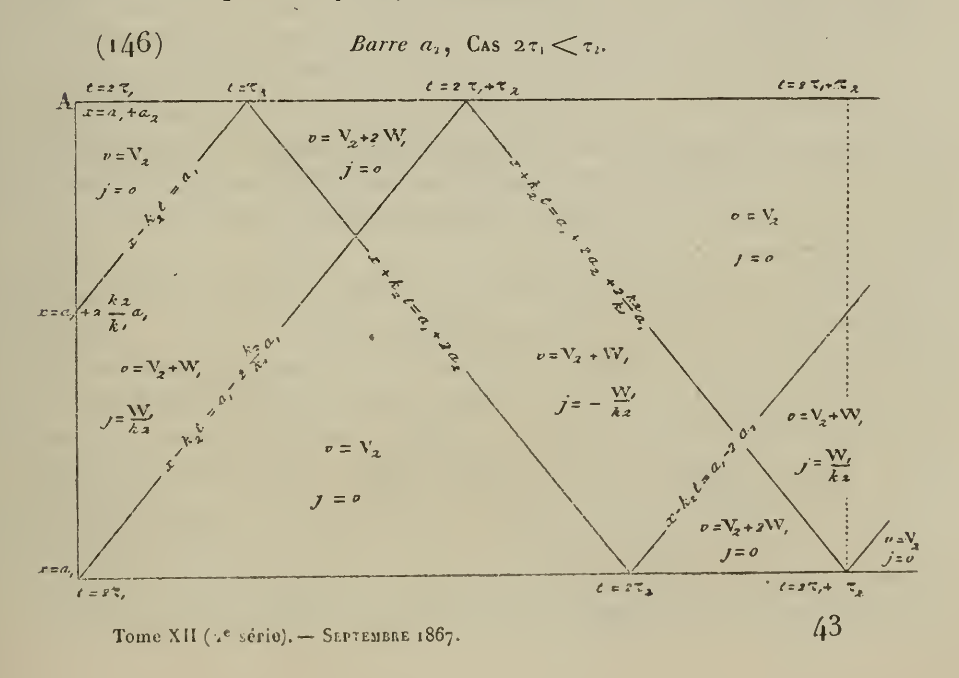
qui ne changera plus puisque la barre est sans compression. Nous n'avons donc à chercher que ce que deviendra la barre a_2, en mettant, dans le diagramme (23),

A la place des vitesses et compressions initiales .... V_1, J_1; V_2, J_2,

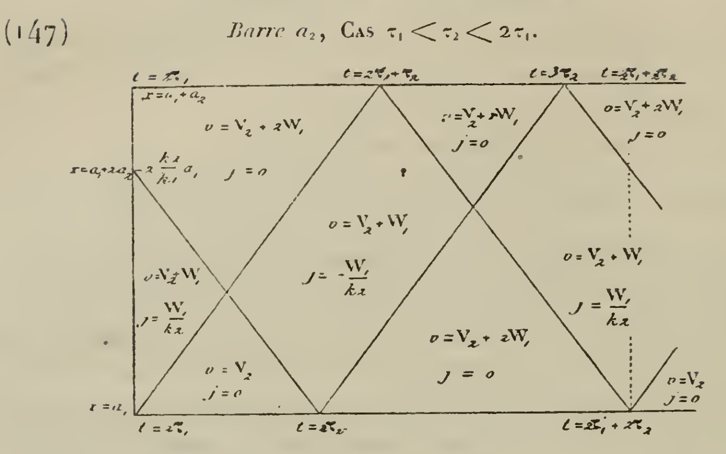
Celles de ses deux parties.................. $V_2 + W_1$, $\frac{W_1}{k_2}$; V_2, 0.

Ce diagramme se réduira à l'un des deux suivants, ayant moins de lignes d'ébranlement et de cases, ainsi que ceux (41), (42) que nous en avons déjà déduits, vu que plusieurs cases contiguës offrant les mêmes vitesses et les mêmes compressions se réunissent en une seule. Cela vient, comme on a dit au n° **6**, de ce que les ébranlements suscités se continuent, sans qu'il en surgisse de nouveaux, partant, dans des sens contraires, des points séparatifs des portions où les vitesses et les compressions sont différentes; en sorte que les lignes inclinées de ces deux diagrammes sont la reproduction de celles des parties supérieures, ou relatives à a_2, des diagrammes (118) à (120) du numéro précédent, moins celles qui proviennent des *réfractions*, c'est-à-dire des passages, de la barre a_1 à la barre a_2, des ébranlements de réflexion ultérieure dans celle-là, qui n'est plus jointe à celle-ci.

(146) *Barre* a_2, CAS $2\tau_1 < \tau_2$.



(147) *Barre* a_2, Cas $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$.



On peut y voir, pour le point $x = a_1$ de la jonction primitive :

Que la vitesse (128) $V_2 + W'_1$ conservée par l'autre barre, a_1, est inférieure à celles que possède la seconde, savoir

$$V_1 \qquad \text{entre} \quad t = 2\tau_1 \quad \text{et} \quad t = 2\tau_2.$$
$$V_2 + 2W'_1 \quad \text{entre} \quad t = 2\tau_2 \quad \text{et} \quad t = 2\tau_1 + 2\tau_2;$$

et que, passé l'instant $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$, les mêmes vitesses se reproduisent périodiquement dans la barre isolée a_2.

Elles s'éloignera donc de plus en plus de la barre a_1, comme on a vu, au n° **6**, que faisait la seconde des deux barres de même grosseur et de même matière, avec cette différence, que celles dont nous nous occupons ici *s'éloignent l'une de l'autre dès l'instant* $t = 2\tau_1$, au lieu de marcher contiguës quoique sans action mutuelle pendant un temps $2\tau_2 - 2\tau_1$, ainsi qu'elles feraient encore avec des grosseurs et des matières différentes si l'on avait $r = 1$.

Examinons maintenant, quand $r < 1$, ce qui se passe après la séparation, qui a lieu dans ce cas à l'instant $t = 2\tau_2$.

La barre a_1 se compose alors de deux parties ayant des vitesses différentes, et dont une n'a pas de compression; et ses états ultérieurs peuvent être déterminés au moyen du diagramme (23). La barre a_2, qui ne se compose aussi que de deux parties dans le cas des deux derniers diagrammes (120), (121) du numéro précédent, pour lesquels on a $\tau_2 < 2\tau_1$, en a *trois* dans le cas $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$ du (119), et *quatre* dans le cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ du (118).

Mais il n'est pas nécessaire de déterminer leurs états ultérieurs com-

plets, ou de construire, pour ces barres en totalité, les diagrammes tels que celui (23) à deux parties, celui (24) à trois, et celui qu'on dresserait de même avec quatre. Il suffit d'avoir le haut des diagrammes relatifs à a_1 et le bas des diagrammes qui seront relatifs à a_2, pour connaître les vitesses successives, dans chacune des deux barres, des points primitivement jointifs $x = a_1$, ce qui est la seule chose essentielle à connaître pour être certain que ces points ne se heurteront plus.

D'abord, il n'y aura aucune nécessité de calculer les abscisses des points où les lignes tant supérieure qu'inférieure de ces diagrammes sont rencontrées par les lignes obliques d'ébranlement conservées. Ces abscisses ne diffèrent en rien, d'après l'observation que nous avons faite tout à l'heure ainsi qu'au n° 6, de celles qui sont cotées sur l'horizontale de A_1 aux diagrammes (118) à (121) à partir du point $t = 2\tau_2$; et l'on doit supprimer, pour chacune des deux barres, les abscisses des points d'intersection des lignes d'ébranlement réfléchies dans l'autre barre depuis l'instant $t = 2\tau_2$. Il ne reste ainsi à calculer, pour la barre a_2, dans le cas par exemple $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ où elle est composée de quatre parties à cet instant, que les quatre vitesses données par les binômes $V' \pm k_2 J'$ qu'on lit au bas du diagramme suivant (148), où V'_1 et J'_1, V'_2 et J'_2, V'_3 et J'_3, V'_4 et J'_4, désignent les vitesses et compressions de ces parties en commençant par le bas.

(148)

Les binômes que nous avons marqués comme égaux seront en effet trouvés tels, d'après les valeurs des V′ et des J′ indiquées à gauche, ce qui réduit à quatre cases triangulaires inférieures un diagramme qui, complet, ou avec des vitesses et des compressions initiales quelconques, en eût offert huit.

Nous obtiendrons ainsi les valeurs suivantes, au point de jonction primitif $x = a_1$, des vitesses dans les deux barres se mouvant isolément après la séparation à l'instant $t = 2\tau_2$. On peut voir que les distances horizontales ou les temps cotés y sont bien les mêmes qu'aux quatre diagrammes (118) à (121).

(149)

Cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$

Cas $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$

Cas $3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1$

Cas $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$

Sur chacune de ces quatre lignes, les cotes supérieures de temps et de vitesses sont relatives à la barre a_2, les cotes inférieures le sont à la barre a_1. Les vitesses redeviennent les mêmes :

Pour la barre a_2, après $t = 4\tau_2$, $6\tau_2$, $8\tau_2, \ldots$,

Pour la barre a_1, après $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$, $4\tau_1 + 2\tau_2$, $6\tau_1 + 2\tau_2, \ldots$

En multipliant les vitesses successives de la barre a_2 par les temps (différences des valeurs consécutives de t) pendant lesquels elles ont régné, et en ajoutant les produits, on a pour une époque quelconque le chemin qu'elle a fait, au point inférieur primitivement contigu à la barre a_1, depuis l'époque $t = 2\tau_2$. En retranchant de cette somme une somme de produits analogues, faite de même pour le point supérieur de la barre a_1, et arrêtée à la même époque, on obtient l'avance prise par la barre a_2, ou la distance à laquelle doivent se trouver l'un de l'autre leurs points primitivement en contact.

Si, à toutes les époques cotées sur les lignes horizontales, les distances ou *avances* ainsi calculées sont positives pour les deux rapports extrêmes correspondants de τ_2 à τ_1 : par exemple, dans le cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, en faisant successivemen $\tau_2 = 3\tau_1$ et $\tau_2 = 4\tau_1$, on sera certain qu'elles sont positives pour tous les rapports de τ_2 à τ_1 compris entre les limites, telles que 3 et 4, relatives à chaque cas examiné.

Nous en avons fait le calcul pour les quatre cas mentionnés, jusques après plusieurs périodes de retour des mêmes vitesses; et nous avons constamment trouvé, pour la distance ou l'avance, des produits de $W_{(i)}\tau_1$ par des polynômes en r, qui restent positifs quand on donne à r des valeurs quelconques > 0 et < 1, limites actuelles du rapport que r représente.

Par exemple :

1° *Cas.* $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$; pour $t = 14\tau_1$, les cheminements des extrémités primitivement jointives de la première et de la seconde barre auront été respectivement

$$(14\tau_1 - 2\tau_2)V_2 + (-80\tau_1 + 20\tau_2)W'''_{'''} + (-36\tau_1 + 18\tau_2)W^{\text{IV}}_{\text{IV}},$$

et

$$(14\tau_1 - 2\tau_2)V_2 + (4\tau_1 + 4\tau_2)W_{,} + (-8\tau_1 - 4\tau_2)W'_{,,} + (12\tau_1 + 4\tau_2)W''_{'''} + \\ + (-64\tau_1 + 16\tau_2)W'''_{\text{IV}}.$$

L'excès du second sur le premier est :

Si $\tau_2 = 3\tau_1$,

$$\tau_1(16W_{,} - 20W'_{,,} + 24W''_{'''} - 16W'''_{\text{IV}} + 20W'''_{'''} - 18W^{\text{IV}}_{\text{IV}}) = W_{\text{IV}}\tau_1(2r^4 + 36r^3 - 56r^2 + 108r + 38);$$

Si $\tau_2 = 4\tau_1$,

$$\tau_1(20\,\mathrm{W}_{,} - 24\,\mathrm{W}'_{,,} + 28\,\mathrm{W}''_{,,,} - 36\,\mathrm{W}^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{IV}}) = \mathrm{W}_{\mathrm{IV}}\tau_1(-36r^4 + 168r^3 - 208r^2 + 190r + 36).$$

Le premier des deux quintinômes en r entre parenthèses est évidemment positif pour toute valeur de $r > 0$ et < 1; le second l'est également, car l'ensemble des deux derniers termes, qui est 226 pour $r = 1$, excède toujours la valeur numérique du précédent $- 208\,r^2$.

2° *Cas.* $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$; pour $t = 4\tau_1 + 4\tau_2$ le même excès serait :

Si $\tau_2 = 2\tau_1$,

$$\tau_1(8\,\mathrm{W}_{,} - 8\,\mathrm{W}'_{,,} - 8\,\mathrm{W}''_{,,}) = 8\,\mathrm{W}_{,,}\tau_1(-r^2 + 2r + 1);$$

Si $\tau_2 = 3\tau_1$,

$$\tau_1(8\,\mathrm{W}_{,} - 8\,\mathrm{W}'_{,,} + 4\,\mathrm{W}''_{,,,} - 2\,\mathrm{W}''_{,,} + 8\,\mathrm{W}'''_{,,,}) = 2\,\mathrm{W}_{,,,}\tau_1(3r^3 - 9r^2 + 17r + 5),$$

tous deux positifs, r étant > 0 et < 1.

Et de même pour les autres époques et les autres cas.

Or, malgré la non-concordance des périodes, si deux lignes brisées *périodiques,* ou qui ont des droites pour lignes moyennes en partant du même point, comme sont celles qui auraient pour abscisses les temps et pour ordonnées les distances parcourues par les points primitivement jointifs des deux barres, ne se rejoignent pas dans les premières périodes, elles s'éloignent et divergent nécessairement de plus en plus l'une de l'autre.

Nous pouvons donc nous tenir assurés que les barres, séparées à l'instant $t = 2\tau_2$ quand elles ne l'ont pas été à l'instant $t = 2\tau_1$, ne feront pas contre-coup en vertu de leurs vibrations, et que leur séparation est définitive, ou qu'elles conserveront, après leur choc, les vitesses de translation des formules (131), (133), (148), relatives aux trois cas $r = 1$, $r > 1$, $r < 1$, c'est-à-dire à

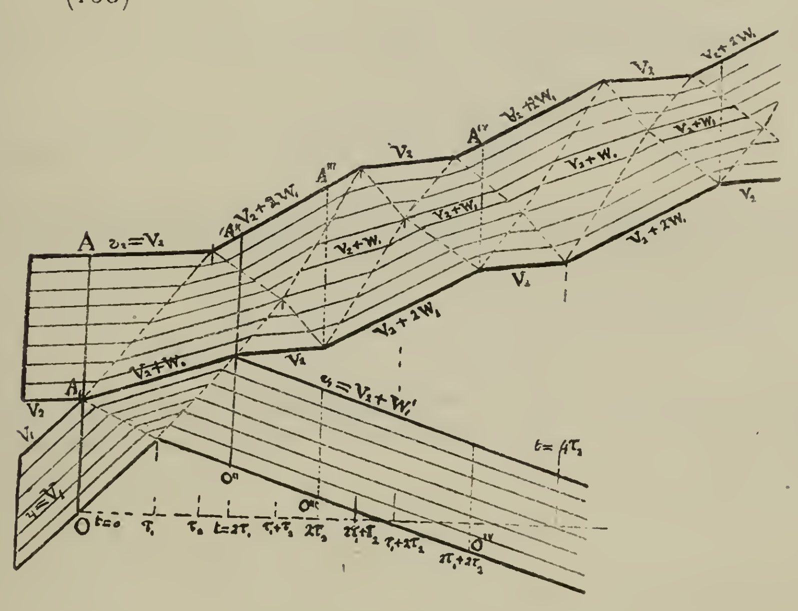
$$\mathrm{m}_2 k_2 = \text{ ou } > \text{ ou } < \mathrm{m}_1 k_1.$$

15. *Épures représentant les mouvements et les états successifs des deux barres depuis un instant précédant un peu leur choc jusqu'à un temps quelconque après qu'il est terminé.* — Ces épures, qui peignent

aux yeux tout ce qui se passe, donnent, comme celle (42) du n° 6 (relative à $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$, mais applicable plus généralement à $m_2 k_2 = m_1 k_1$ ou $r = 1$), les traces que laisseraient dans l'espace les points des deux barres transportées, perpendiculairement à leur longueur, avec une vitesse constante prise pour unité, se composant avec les vitesses longitudinales de ces points.

La première (150) est relative à la supposition $r = 3$ ou à un cas

(150)



$r > 1$ (deuxième du n° **11**),

car, avec les échelles prises pour les abscisses t et pour les ordonnées x, on a

$$V_1 = 1, \quad V_2 = \frac{1}{9}, \quad a_1 = 15^{mm}, \quad a_2 = 20^{mm}, \quad \tau_1 = 10^{mm}, \quad \tau_2 = 16^{mm};$$

$$\text{d'où} \quad k_1 = 1,5, \quad k_2 = 1,25;$$

ce qui exige que $\frac{m_2}{m_1} = 3\frac{1,5}{1,25} = \frac{18}{5}$, ou que, par unité de longueur, la masse de la barre a_2 soit $3\frac{3}{5}$ fois celle de la barre a_1. On voit que les deux barres se séparent à l'instant $t = 2\tau_1$; que la première, a_1,

rebondit, ou prend, au moment où elle achève de perdre sa compression, une vitesse finale

$$V_2 + W'_{,} = V_2 - \frac{r-1}{r+1}(V_1 - V_2) = -\frac{5}{12},$$

dont le signe négatif indique un sens opposé au sens suivant lequel elle a heurté la seconde barre. Celle-ci reprend périodiquement, savoir aux instants $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$, $2\tau_1 + 4\tau_2$, etc., l'état où elle était à l'instant $t = 2\tau_1$ de la séparation. Les proportions de leurs compressions étaient, pendant leur jonction, et de part et d'autre du point où elles se touchaient,

$$j_1 = r\frac{W_{,}}{k_1} = \frac{r}{1+r}\,\frac{V_1 - V_2}{k_1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{1,5} = \frac{4}{9}, \quad j_2 = \frac{W_{,}}{k_2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{1,25} = \frac{8}{45};$$

en sorte que les espacements verticaux entre les lignes parallèles primitivement distantes l'une de l'autre de $2^{mm},5$ étaient réduits à

$$2,5\left(1 - \frac{4}{9}\right) = 1^{mm},39 \quad \text{et} \quad 2,5\left(1 - \frac{8}{45}\right) = 2,055.$$

Comme la barre a_2 se dilate après la séparation, et possède, à l'instant $t = 2\tau_2$, sur les trois quarts de sa longueur, la compression négative

$$j_2 = -\frac{W_{,}}{k_2} = -\frac{8}{45},$$

les espacements sont portés alors à $2,5\left(1 + \frac{8}{45}\right) = 2^{mm},945$, mesurés toujours *verticalement* ou dans un sens parallèle à OA.

La deuxième épure (151) est relative au cas (troisième du n° **11**)

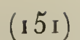
$$r < 1;$$

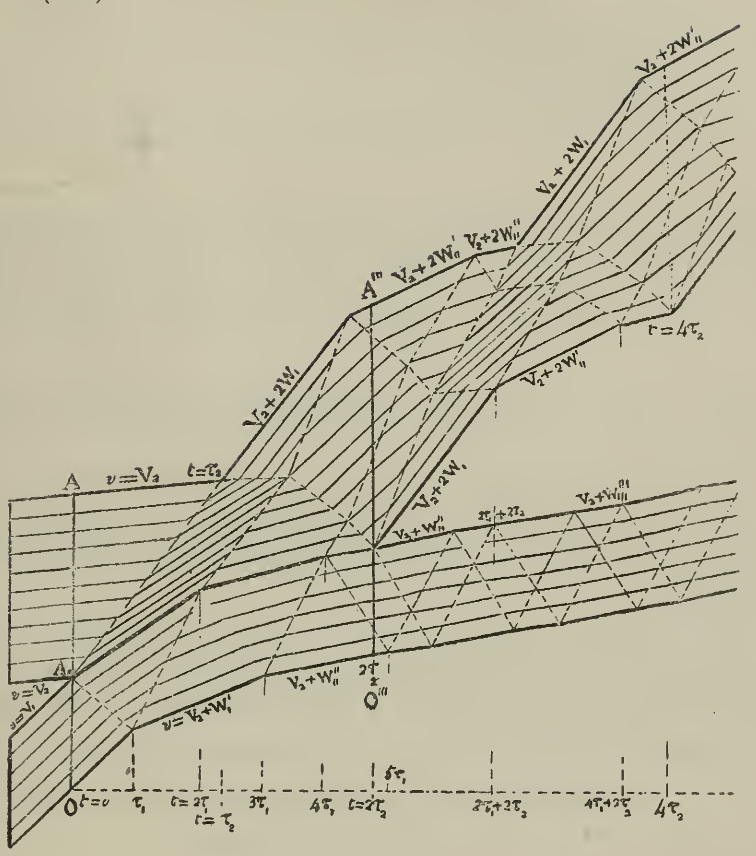
car elle suppose

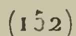
$$r = \frac{1}{2}, \quad V_1 = 1, \quad V_2 = \frac{1}{10}, \quad a_1 = 15, \quad a_2 = 25, \quad \tau_1 = 8,5, \quad \tau_2 = 20;$$

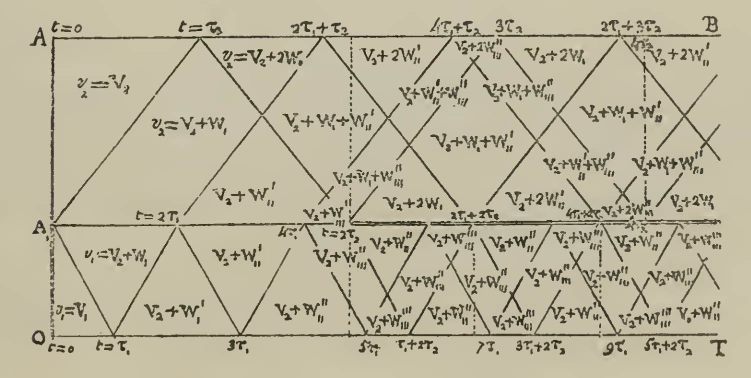
$$\text{d'où} \quad k_1 = \frac{30}{17}, \quad k_2 = \frac{5}{4};$$

ce qui exige que $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{30}{17}\cdot\frac{4}{5} = \frac{12}{17}$.


(151)


A
$v = V_2$
$t = \tau_2$
$V_2 + 2W_1$
A'''
$V_2 + 2W_{11}'$
$V_2 + 2W_{11}''$
$V_2 + 2W_1$
$V_2 + 2W_{11}'$
$t = 4\tau_2$
$V_2 + 2W_{11}'$
$V_2 + 2W_1$
$V_2 + W_{11}''$
$V_2 + W_{111}''$
A_1
$v = V_2$
$v = V_1$
$v = V_2 + W_1'$
$V_2 + W_{11}''$
O'''
O
$t = 0$
τ_1
$t = 2\tau_1$
$t = \tau_2$
$3\tau_1$
$4\tau_1$
$t = 2\tau_2$
$5\tau_1$
$2\tau_1 + 2\tau_2$
$4\tau_2$


(152)


A
$t = 0$
$t = \tau_2$
$2\tau_1 + \tau_2$
$3\tau_2$
B
$v_2 = V_2$
$v_2 = V_2 + 2W_1'$
$v_2 = V_2 + W_1$
$V_2 + W_1 + W_{11}'$
$V_2 + 2W_{11}'$
$V_2 + 2W_1$
$V_2 + W_1 + W_{11}'$
$V_2 + W_{11}'$
$V_2 + 2W_1$
A_1
$t = 2\tau_1$
$t = 2\tau_2$
$v_1 = V_2 + W_1$
$V_2 + W_{11}'$
$v_1 = V_1$
$V_2 + W_1'$
$V_2 + W_{11}''$
O
$t = 0$
$t = \tau_1$
$3\tau_1$
$5\tau_1$
$\tau_1 + 2\tau_2$
$7\tau_1$
$3\tau_1 + 2\tau_2$
$9\tau_1$
$5\tau_1 + 2\tau_2$
T

La séparation se fait (n° **11**) à l'instant $t = 2\tau_2$, après que la deuxième barre, fortement comprimée par le choc, surtout à l'instant $t = 2\tau_1$, dans une proportion

$$\dot{j}_2 = \frac{W_{,}}{k_2} = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{V_1 - V_2}{k_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25},$$

s'est ensuite fortement dilatée, comme on le voit par sa longueur à cet instant $t = 2\tau_2$, où elle a (diagr. 119) deux compressions négatives,

$$\dot{j}_2 = \frac{-W_{,} + W''_{'''}}{k_2} = -\frac{32}{75}, \quad \dot{j}_2 = \frac{-W_{,} + W'_{''}}{k_2} = -\frac{8}{25},$$

portant à 3,57 et à 3,3 les espacements des points primitivement distants de 2,5.

De pareilles dilatations et compressions ne sauraient être prises sans altérer la contexture des barres; mais il est entendu que les données sont choisies de manière à les exagérer pour les rendre très-apparentes.

A cette deuxième épure (151) on a joint le diagramme (152) des vitesses des deux barres avant et après l'instant $t = 2\tau_2$ de la séparation. Il est composé, quant aux premières vitesses, avec celui qui porte le chiffre (119) au n° **10** $\left(\text{car } \frac{\tau_2}{\tau_1} \text{ est compris entre 2 et 3}\right)$, et, quant aux secondes vitesses, comme le sont les diagrammes (23), (24), (40), (148) du mouvement d'une barre unique.

En faisant

$$r = \frac{1}{2}, \quad V_1 = 1, \quad V_2 = \frac{1}{10}$$

dans les expressions de v_1 et de v_2, écrites à l'intérieur de ses diverses cases, on a les tangentes des angles que forment, avec l'axe des abscisses ou des temps, les diverses parties des lignes brisées qui représentent, dans les cases correspondantes de l'épure, les trajectoires de sept points de la barre a_1 et de onze points de la barre a_2.

Les barres séparées reviennent périodiquement, savoir : a_1 quand $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$, $4\tau_1 + 2\tau_2, \ldots$, et a_2 quand $t = 4\tau_2$, $6\tau_2, \ldots$, à l'état où elles étaient à l'instant $t = 2\tau_2$ de leur séparation.

Si τ_2 contenait un très-grand nombre de fois τ_1, $r = \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$ étant encore supposé < 1, le mouvement des diverses parties des barres, de la deuxième surtout, serait bien plus compliqué, et les trajectoires de leurs points approcheraient d'être des lignes courbes, déterminables par les formules en série trigonométrique du n° 8.

14. *Condition générale de séparation des barres à un instant donné quelconque, exprimée en fonction des vitesses et des compressions de leurs extrémités jointives à cet instant.* — Soient ces vitesses et ces proportions de compression, de part et d'autre du point de contact,

V'_2, J'_2 pour la barre a_2, supposée toujours *aller devant*, ou être celle vers laquelle les vitesses positives sont dirigées;

V'_1, J'_1 pour la barre a_1.

Nous pouvons établir de deux manières la condition pour qu'elles se séparent aussitôt après l'instant où ces vitesses et compressions sont possédées ou survenues.

Supposons en premier lieu, ce qui est permis, qu'elles se séparent pendant un temps *infiniment petit*. Le diagramme (23) du n° 5 relatif aux barres se mouvant isolément, ou le théorème qu'on en déduit, énoncé à la fin de ce même numéro, montre que leurs vitesses, au point de leur jonction, deviendront immédiatement après :

$$V'_2 - k_2 J'_2 \quad \text{pour} \quad a_2,$$
$$V'_1 + k_1 J'_1 \quad \text{pour} \quad a_1.$$

Cette soustraction $-k_2 J'_2$ et cette addition $k_1 J'_1$, faites à leurs vitesses positives, viennent, comme on a dit alors, de la *détente* des compressions J'_1, J'_2. Si la nouvelle vitesse de a_2 excède la nouvelle vitesse de a_1, elles s'éloignent alors l'une de l'autre.

La condition de séparation ou d'éloignement est donc

$$V'_2 - k_2 J'_2 - V'_1 - k_1 J'_1 > 0. \tag{153}$$

En second lieu, nous allons chercher à quelle condition, les barres

restant unies, leurs compressions à l'endroit de la jonction *deviendraient négatives*. Pour cela, dans la deuxième et dans la troisième formule (79), et dans les parties inférieures des formules (84) et (85) du n° 8, dressées pour des vitesses ψ et pour des compressions φ' initiales quelconques, nous ferons

$$\varphi'_1\zeta = -\mathrm{J}'_1, \quad \varphi'_2\zeta = -\mathrm{J}'_2, \quad \psi_1\zeta = \mathrm{V}'_1, \quad \psi_2\zeta = \mathrm{V}'_2.$$

Il en résultera les expressions suivantes, plus générales et aussi plus *scindées* quant aux limites que celles (92) et (93) qui ont été obtenues au n° 9 pour deux barres qui se heurtent avec des vitesses V_1, V_2 sans compression :

$$(154)\quad \left\{\begin{array}{l} 2k_1\,\mathrm{F}'_1\left\{\begin{matrix}0\\a_1\end{matrix}\right\} = -\mathrm{V}'_1 - k_1\,\mathrm{J}'_1,\\[4pt] 2k_2\,f'_2\left\{\begin{matrix}a_1+a_2\\a_1\end{matrix}\right\} = \mathrm{V}'_2 - k_2\,\mathrm{J}'_2,\\[4pt] 2k_1\,f'_1\left\{\begin{matrix}2a_1\\a_1\end{matrix}\right\} = \dfrac{r-1}{r+1}(-\mathrm{V}'_1 - k_1\,\mathrm{J}'_1) + \dfrac{2r}{r+1}(\mathrm{V}'_2 - k_2\,\mathrm{J}'_2),\\[4pt] 2k_2\,\mathrm{F}'_2\left\{\begin{matrix}a_1 - \dfrac{k_2}{k_1}a_1\\a_1\end{matrix}\right\} = \dfrac{2}{r+1}(-\mathrm{V}'_1 - k_1\,\mathrm{J}'_1) - \dfrac{r-1}{r+1}(\mathrm{V}'_2 - k_2\,\mathrm{J}'_2),\end{array}\right.$$

formules qu'on pourrait tirer aussi, directement et simplement, des conditions définies (73) à (76) du n° 8, et des deux formules promotrices (82) particularisées.

Or il en résultera, en supposant construit un diagramme tel que (89) relatif aux deux barres unies, que pour la barre a_1, dans la case triangulaire qui est comprise tout entière au-dessous de $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, d'une part entre le point de jonction A_1 ou la ligne extérieure montante $x - k_1 t = a_1$, et la ligne intérieure aussi montante $x - k_1 t = 0$, et d'autre part entre les lignes descendantes $x + k_1 t = a_1$ et $x + k_1 t = 2a_1$, on aurait

$$(155)\quad 2k_1 j_1 = -2k_1 f'_1\left\{\begin{matrix}2a_1\\a_1\end{matrix}\right\} - 2k_1\,\mathrm{F}'_1\left\{\begin{matrix}0\\a_1\end{matrix}\right\} = \frac{2r(\mathrm{V}'_1 + k_1\,\mathrm{J}'_1) - 2r(\mathrm{V}'_2 - k_2\,\mathrm{J}'_2)}{r+1}.$$

Et de même, pour la barre a_2, dans la case trapèze comprise tout entière, d'une part entre les lignes descendantes $x + k_2 t = a_1$ (exté-

rieure) et $x + k_2 t = a_1 + a_2$, et d'autre part entre les lignes montantes $x - k_2 t = a_1$ et $x - k_2 t = a_1 - k_2 \tau_1 = a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1$, on aurait

$$(156)\quad 2k_2 j_2 = -2k_2 f'_2 \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{Bmatrix} - 2k_2 F'_2 \begin{Bmatrix} a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2(V'_1 + k_1 J'_1) - 2(V_2 - k_2 J'_2)}{r+1}.$$

Pour que ces expressions soient négatives il faut qu'on ait

$$V_2 - k_2 J'_2 - V_1 - k_2 J'_1 > 0,$$

ce qui redonne d'une autre manière l'inégalité (153).

On voit que la condition pour que les deux barres se séparent à un instant donné quelconque, exprimée en fonction des vitesses et des compressions qu'elles possèdent à cet instant et à leur point de jonction, est *que la vitesse de celle qui* va devant (*ou* vers *laquelle et non pas* à partir de *laquelle les vitesses sont comptées positivement*) *diminuée du produit de sa compression par la vitesse du son qui s'y propage, soit plus grande que la vitesse de celle qui* va derrière, *augmentée du produit semblable qui lui est relatif.*

Cette condition nécessaire et suffisante doit être substituée à celle $V'_2 > V'_1$ que Cauchy semblait adopter *à priori*, et à celle $V'_2 > V'_1$ avec $J'_1 = 0$, $J'_2 = 0$ que Poisson exigeait et qui, comme on voit, est surabondante.

Il était essentiel d'en faire la remarque, et d'observer qu'il faut combiner chaque vitesse en avant V'_2, V'_1, actuellement possédée, avec les vitesses tant en arrière qu'en avant $-k_2 J'_2$, $k_1 J'_1$ engendrées par les compressions J'_2, J'_1 qui font détente.

Mais l'usage que nous avons fait des diagrammes (118) à (121) du n° **10** nous a dispensés de faire usage de cette condition de séparation (153), car ils donnent toutes calculées les compressions j_1, j_2 qu'auraient fournies les formules (155), (156), et qui seraient prises, immédiatement après les instants considérés, par les deux barres si elles restaient unies, en sorte que nous n'avons eu, au n° **11**, qu'à examiner simplement si elles étaient négatives.

On peut, au reste, comme moyen de vérification, reconnaître que

toutes ces compressions, après les divers instants où l'horizontale $x = a_1$ est rencontrée par les diverses lignes d'ébranlement, sont exactement celles qu'on déduirait de (155), (156).

15. *Puissance vive (demi-force vive) perdue pour la translation ultérieure, dans le choc de deux barres parfaitement élastiques, de grosseurs et de matières différentes.* — Soient, en général, les vitesses des centres de gravité, après le choc, exprimées ainsi :

$$(157)\qquad U_1 = V_1 - \alpha(V_1 - V_2), \quad U_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_2}\alpha(V_1 - V_2).$$

On trouvera pour la perte de puissance vive translatoire due au changement des vitesses primitives V_1, V_2 en ces vitesses de translation ultérieures U_1, U_2

$$(158)\quad \frac{M_1 V_1^2}{2} + \frac{M_2 V_2^2}{2} - \frac{M_1 U_1^2}{2} - \frac{M_2 U_2^2}{2} = M_1\left[2\alpha - \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)\alpha^2\right]\frac{(V_1 - V_2)^2}{2}.$$

Si, pour se faire une idée des grandeurs diverses de cette perte, on la divise par celle qui aurait lieu si les deux barres, de masses M_1, M_2, étaient deux corps dénués d'élasticité, et dont l'expression bien connue (55) est

$$(159)\qquad \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{2},$$

on a pour la *perte proportionnelle*

$$(160)\ \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)\left[2\alpha - \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)\alpha^2\right] = \left(1 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}\right)\left[2\alpha - \left(1 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}\right)\alpha^2\right].$$

Pour qu'elle ne soit pas négative ou nulle, il faut qu'on ait

$$(161)\qquad \alpha < \frac{2M_2}{M_1 + M_2} \quad \text{ou} \quad < \frac{2 m_2 a_2}{m_1 a_1 + m_2 a_2},$$

ou que l'indéterminée α ait tout au plus la valeur qu'elle possède dans les formules (145) de la théorie ordinaire. Nous verrons que cette condition est toujours remplie.

1° Dans le cas

$$r = 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 > m_1 k_1$$

où la masse ébranlée à chaque instant est la même dans les deux barres, on a, d'après les formules (131),

$$\alpha = 1,$$

qui remplit bien la condition (158), car $m_2 k_2 = m_1 k_1$ donne $\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = \frac{k_2}{k_1}\frac{a_1}{a_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$, plus petit que 1. La perte proportionnelle, toujours positive, mais qui peut varier entre 1 et 0, est

$$(162) \qquad 1 - \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2.$$

Les valeurs numériques de cette perte sont celles qu'on a données pour la perte (56) qui a lieu avec deux barres de même grosseur et de même matière, en substituant le rapport des masses totales au rapport $\frac{a_1}{a_2}$ des longueurs.

2° Dans le cas

$$r > 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 > m_1 k_1$$

où la masse ébranlée à chaque instant est plus grande dans celle des deux barres dont l'ébranlement met le plus de temps à parcourir la longueur, on a

$$(163) \qquad \alpha = \frac{2r}{1+r} = \frac{2 m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}$$

remplissant encore la condition (158), car $m_2 k_2 . m_1 a_1 < m_1 k_1 . m_2 a_2$ est la même chose que $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$ ou $\tau_1 < \tau_2$.

La perte proportionnelle (157) devient

$$(164) \qquad \frac{4 m_1 k_1 . m_2 k_2}{(m_1 k_1 + m_2 k_2)^2}\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)\left(1 - \frac{a_1 k_2}{a_2 k_1}\right),$$

quantité positive ou nulle puisque $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{a_1 k_2}{a_2 k_1}$ est $=$ ou < 1. Le cas

$\tau_1 = \tau_2$, où elle est nulle, est celui où les formules des vitesses après le choc deviennent celles des Traités de physique qui donnent zéro pour la force vive perdue.

Si, par exemple, les deux barres sont de même matière, ou, plus généralement, si le son se propage avec la même vitesse dans toutes deux, en sorte que

$$k_1 = k_2,$$

la perte proportionnelle se réduit à

$$(165) \qquad \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2}\left(1+\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}\right)\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)$$

donnant :

$$\text{si } m_2 = 2m_1, \quad \text{perte proportionnelle } \frac{8}{9}\left(1+\frac{a_1}{2a_2}\right)\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right);$$

$$\text{si } m_2 = 3m_1, \quad \text{perte proportionnelle } \frac{3}{4}\left(1+\frac{a_1}{3a_2}\right)\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right);$$

$$\text{qui pour } \frac{a_2}{a_1} = 1, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad \infty,$$

$$\text{ont des valeurs} \begin{cases} 0, & \frac{56}{225}, & \frac{32}{81}, & \frac{5}{9}, & \frac{64}{81}, \ldots, & \frac{8}{9}, \\ 0, & \frac{19}{100}, & \frac{11}{36}, & \frac{7}{16}, & \frac{5}{9}, \ldots, & \frac{3}{4}. \end{cases}$$

3° Dans le cas

$$r < 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 < m_1 k_1,$$

où la masse envahie par l'ébranlement est plus petite, pour un même temps, dans celle des deux barres qui exige le plus de temps pour l'être sur toute sa longueur, il faut, dans l'expression (157), faire d'après les formules (143)

$$(166) \qquad \begin{cases} \alpha = 1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \left(1 - 2r\,\frac{\frac{\tau_2}{\tau_1} - n}{1+r}\right) = \\ \quad = 1 - \left(\frac{m_1 k_1 - m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}\right)^n \left[1 - \frac{2 m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}\left(\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n\right)\right]. \end{cases}$$

Cette expression remplit la condition (158) de ne pas surpasser

$$\frac{2\,\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2}=\frac{2\,\dfrac{\mathfrak{m}_2 a_2}{\mathfrak{m}_1 a_1}}{1+\dfrac{\mathfrak{m}_2 a_2}{\mathfrak{m}_1 a_1}}=\frac{2r\,\dfrac{\tau_2}{\tau_1}}{1+r\,\dfrac{\tau_2}{\tau_1}},$$

en sorte qu'on a toujours

$$(167)\qquad 1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n\left(1-2r\frac{\dfrac{\tau_2}{\tau_1}-n}{1+r}\right)-\frac{2r\,\dfrac{\tau_2}{\tau_1}}{1+r\,\dfrac{\tau_2}{\tau_1}}<\text{ ou }=0.$$

En effet, $\frac{\tau_2}{\tau_1}-n$ reste compris entre 0 et 1, puisque n est la partie entière du quotient de τ_2 par τ_1. Supposons d'abord qu'il soit $=0$, ou que τ_2 comprenne τ_1 un nombre exact de fois. Le premier membre de (167) sera, en mettant n pour $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ et multipliant par $(1+r)^n(1+nr)$,

$$\begin{aligned}
&(1-nr)(1+r)^n-(1+nr)(1-r)^n\\
&\quad=2nr+2n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}r^3+2n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{4}\frac{n-3}{3}\frac{n-4}{5}r^5+\ldots\\
&\qquad-nr\left(2+2n\frac{n-1}{2}r^2+2n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4}r^4+\ldots\right)\\
&\quad=2n\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-2}{3}-n\right)r^3+2n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4}\left(\frac{n-4}{5}-n\right)r^3+\ldots,
\end{aligned}$$

expression d'un nombre *fini* de termes tous négatifs.

Si nous attribuons, en second lieu, à $\frac{\tau_2}{\tau_1}-n$ sa deuxième valeur extrême, qui est 1, nous aurons la même chose avec $n+1$ au lieu de n, et la conclusion sera la même.

Enfin, en conservant entier ce premier membre de (167) et en y faisant $\frac{\tau_2}{\tau_1}-n=\varepsilon$, nous aurons, si nous multiplions par le produit toujours positif des dénominateurs, une expression en n et r toujours négative, plus ε multiplié par un polynôme d'un signe incertain. Quand ce polynôme sera négatif, l'ensemble le sera également, et la condition (167) sera satisfaite. Quand il sera positif, l'ensemble aura sa plus

grande valeur pour $\varepsilon = 1$; or nous venons de voir que si $\varepsilon = \frac{\tau_2}{\tau_1} - n = 1$, l'ensemble est encore positif. La condition (161) pour que la perte de force vive soit nulle ou positive est donc satisfaite par les formules de vitesses finales du cas $r < 1$ comme par celles des cas $r = 1$, $r > 1$.

Soient, par exemple, deux barres de même matière, ou plus généralement soit $k_2 = k_1$ d'où $r = \frac{m_2}{m_1}$.

Et soit $\frac{\tau_1}{\tau_2} = n = \frac{a_2}{a_1}$, ou a_2 multiple exact de a_1.

Alors on a

$$\alpha = 1 - \left(\frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} - 1} \right)^{\frac{a_2}{a_1}}.$$

D'où si $\frac{m_1}{m_2} = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

Et si $\frac{a_2}{a_1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\alpha = $

$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{m_1}{m_2} = 1$	2	3	4	5
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
2	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{5}{9}$
3	1	$\frac{26}{27}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{98}{125}$	$\frac{19}{27}$
4	1	$\frac{80}{81}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{544}{625}$	$\frac{65}{81}$
5	1	$\frac{242}{243}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{2882}{3125}$	$\frac{211}{243}$.

La perte proportionnelle (157) prend les valeurs suivantes :

Si $\frac{a_2}{a_1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; Perte $=$

$\frac{a_2}{a_1}$					
1	0	0	0	0	0
2	0,75	0,395	0,234	0,154	0,108
3	0,889	0,634	0,4375	0,312	0,232
4	0,9375	0,768	0,590	0,451	0,351
5	0,96	0,845	0,6975	0,565	0,457.

Tels sont les rapports de la perte de force vive translatoire à celle qui aurait lieu dans le choc de deux corps ayant les mêmes masses,

et dénués d'élasticité. Cette perte proportionnelle est d'autant moindre, comme on voit, que la masse par unité de longueur est plus grande dans la barre la plus courte a_1, relativement à ce qu'elle est dans la plus longue; et elle est d'autant plus forte que le rapport des longueurs est plus considérable, ou que les réflexions et *réfractions* de l'ébranlement ont été plus nombreuses avant l'instant $t = 2\tau_2$ où les deux barres se sont séparées.

16. *Démonstration élémentaire (ou analogue à celles des Cours de physique) des formules nouvelles du choc longitudinal des barres élastiques, et, en même temps, de l'expression connue de la vitesse de propagation du son dans les tiges solides ou dans les colonnes d'air prismatiques.* — Si, aux deux extrémités d'un prisme élastique, l'on applique deux pressions P égales et contraires, et uniformément réparties sur les divers éléments superficiels de ses bases, deux portions de ce prisme, séparées par une section transversale quelconque, exerceront l'une sur l'autre, dans l'état d'équilibre, une pression nécessairement de la même intensité et répartie de même. Il se comprimera uniformément; et si l'on appelle ω la surface de sa base, E un coefficient dit *module d'élasticité* longitudinale, et j la *compression* ou l'accourcissement par unité de longueur, compression qui est très-petite si les forces P n'excèdent pas ce que la matière peut porter sans que sa contexture s'altère, on a

$$(a) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{E}\omega j;$$

égalité qui a encore lieu lorsque P et j sont supposées *négatives*, c'est-à-dire lorsque le prisme éprouve une *traction* et une *dilatation* au lieu d'une pression et d'une compression proprement dites.

Si, la barre prismatique étant dans son état naturel et en repos, l'on vient à appliquer une pareille force P sur une de ses deux bases, cette barre prendra de même la compression j donnée par (a), non pas de suite sur toute sa longueur, mais dans une partie qui sera graduellement croissante. Et si

$$kt$$

désigne la longueur qu'avait primitivement la partie qui se trouve ainsi

comprimée après un petit temps t, comme elle s'est accourcie de

$$kjt,$$

son origine, ou la base pressée, aura cheminé d'autant, c'est-à-dire aura parcouru un petit espace kjt. D'où il suit qu'en appelant

$$v$$

la vitesse prise par cette origine, et, aussi, nécessairement par les autres points de la partie comprimée puisqu'ils sont restés aux mêmes distances les uns des autres depuis la compression effectuée, on aura

(b) $v = \pm kj$ selon que le sens de la force exercée ou de la propagation de la compression est, ou non, celui des vitesses comptées positivement.

Une première conséquence est que si

$$\rho$$

désigne la densité de la matière, ou si $\rho\omega kt$ est la masse mue et comprimée au bout d'un temps t, l'on a, pour l'égalité de la quantité de mouvement que cette masse a acquise, à celle qui lui a été imprimée par la force $E\omega j$,

$$\rho\omega kt . kj = E\omega j . t;$$

le module E pouvant, du reste, avoir ici une valeur un peu autre que dans l'état statique, vu que la rapidité de la compression des tranches successives peut susciter des vibrations atomiques ou dégager de la chaleur.

On en tire pour la longueur k comprimée dans l'unité de temps, ou pour *la célérité* (mot que nous emploierons afin d'éviter la confusion avec les *vitesses* des molécules) *de la propagation de la compression :*

$$k = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (c)$$

Et cette formule représenterait également la célérité de la propagation de la dilatation due, soit à une traction, comme on a dit, soit simplement à la soustraction de la force qui a comprimé. Par conséquent elle représente, aussi, ce qu'on appelle *la vitesse de transmission du*

son, car le son est produit par un ou plusieurs petits ébranlements se composant d'une compression suivie d'une dilatation [*].

Si, au lieu d'être en repos, la barre qu'une force est venue com-

---

[*] Je ne connais pas d'autre démonstration élémentaire qui ait été donnée de cette expression (c), due à Newton, car celle qu'il en a présentée lui-même, et que son génie seul a comprise, n'a pas été regardée comme acceptable, et aucun auteur de Cours de physique n'a cru pouvoir la faire passer dans son enseignement, même en en modifiant les termes.

Je suis convaincu que la théorie de la propagation du son gagnerait en clarté si l'on considérait d'abord, comme je fais ici, la propagation d'une simple compression, produite par une force qui continue d'agir; en ne parlant qu'ensuite des vibrations ou des alternatives périodiques de compression et de dilatation qui compliquent la question fort simple de propagation.

En général une force constante qui agit sur une masse constante lui donne, comme on sait, un mouvement uniformément accéléré; mais si elle agit sur une masse *qui croît proportionnellement au temps*, telle que la masse $\rho\omega kt$ ci-dessus, *elle lui donne une vitesse constante*, comme celle qui se trouve ici désignée par v ou $\pm kj$.

Dans un cabinet de physique, on pourrait faire distinguer d'une manière très-ostensible cette *vitesse* des tranches d'une tige de la *célérité* du son qui s'y propage, par celle de la propagation de la jonction successive d'un certain nombre de rondelles enfilées sur une même tige horizontale qui les traverserait à frottement doux au milieu. On leur donnerait, par exemple, 10 millimètres d'épaisseur, et on les espacerait prealablement de *un* millimètre. En poussant de 1, de 2 centimètres celle de gauche, elles se joindraient les unes après les autres, et la *jonction* avancerait de 10, de 20 centimètres vers la droite; on verrait ainsi que la célérité de propagation de la jonction est dix fois plus grande que la vitesse constante des rondelles mises en mouvement et dont l'ensemble a été comprimé d'un dixième $\left(j = \frac{1}{10},\ k = 10v,\ v = kj\right)$.

La propagation des *ondes planes* par glissement transversal, dont il est tout aussi facile de démontrer élémentairement que la *célérité* est exprimée par $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ (G étant le coefficient d'élasticité de *glissement* du milieu où elles se forment), pourrait être figurée de même, au moyen de plaques polies et superposées, dont on limiterait le glissement relatif au dixième, par exemple, de leur épaisseur commune. On peut ainsi espérer un jour de traduire élémentairement et d'une manière claire les beaux résultats des recherches par lesquelles Cauchy a donné à la théorie de Fresnel une rigueur qui lui manquait (t. VIII de ce Journal, 1863, p. 381 à 413). Il est à peine besoin de dire que le même genre de démonstration s'applique à la formule théorique de la propagation d'une intumescence liquide ou d'une onde *solitaire* dans le cas du canal rectangulaire peu profond traité par Lagrange (*Méc. anal.*, 2e Partie, sect. XI, art. 36).

primer ou dilater avait auparavant, dans toutes ses parties, une vitesse

$$v_0,$$

la nouvelle vitesse v des portions éprouvant ou perdant la compression ou la dilatation j sera

$$(d) \qquad v = v_0 \pm kj,$$

car le cheminement de l'extrémité pressée a été $v_0 t \pm kjt$. Je dis *ou perdant*, parce que cette formule est également applicable, en choisissant d'une manière toujours facile le signe de kj, lorsque la dilatation ou compression résulte d'une soustraction de force, ou lorsqu'elle n'est autre que la cessation naturelle, en commençant par une extrémité, d'une compression ou d'une dilatation antérieure. C'est ce que j'exprimerai quelquefois en disant que

$$\pm kj$$

est la *vitesse de détente*.

Soient maintenant deux barres prismatiques qui viennent à se presser ou à se heurter mutuellement dans le sens longitudinal. Soient respectivement :

a_1, a_2 leurs longueurs;

V_1, V_2 les vitesses, comptées positivement de a_1 vers a_2, qui animent uniformément leurs molécules à l'instant $t = 0$ où elles se rencontrent, ce qui exige

$$(e) \qquad V_1 - V_2 > 0.$$

Soient encore

v_1 et j_1, v_2 et j_2 les vitesses et les compressions prises plus tard par diverses de leurs parties;

U_1, U_2 les vitesses de leurs centres de gravité;

m_1, m_2 leurs masses par unité de longueur;

k_1, k_2 les célérités de propagation des compressions et dilatations

dans leurs matières. Appelons aussi

$$(f) \qquad r = \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$$

le rapport des masses qui se sont ébranlées ou comprimées pendant un même temps dans la seconde et dans la première de ces barres.

Et supposons

$$(g) \qquad \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2},$$

ou que celle des deux barres qui va derrière soit parcourue dans un temps moindre par le son que celle qui va devant : supposition permise, puisqu'on peut choisir à volonté le sens des vitesses regardées comme positives.

Au bout d'un temps quelconque t égal ou inférieur à $\frac{a_1}{k_1}$, les parties comprimées dans les deux barres auront une nouvelle vitesse uniforme, la même pour toutes deux puisqu'elles ont un point commun. Soit

$$u$$

cette vitesse. Elle a remplacé les vitesses V_1, V_2 dans ces parties, de longueurs $k_1 t$, $k_2 t$, dont les masses sont entre elles comme 1 est à r. On devra avoir, pour la conservation de la quantité totale du mouvement,

$$(1 + r) u = V_1 + r V_2.$$

On a aussi, pour ces parties, conformément à l'expression générale (d) $v_0 \pm kj$ de la vitesse nouvelle qui vient d'une vitesse antérieure v_0 et d'une compression effectuée j

$$u = V_1 - k_1 j_1, \quad u = V_2 + k_2 j_2,$$

eu égard, quant aux signes, à ce que les compressions se font suivant le sens positif des vitesses dans la deuxième barre et suivant un sens opposé dans la première. On tire de là :

$$(h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{De } t = 0 \text{ à } t = \frac{a_1}{k_1} : \\ u = v_1 = v_2 = \frac{V_1 + r V_2}{1 + r} = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1 + r}, \\ j_1 = \frac{V_1 - u}{k_1} = r \frac{V_1 - V_2}{(1 + r) k_1}, \quad j_2 = \frac{u - V_2}{k_2} = \frac{V_1 - V_2}{(1 + r) k_2}; \end{array} \right.$$

expressions dont les deux dernières, relatives aux compressions, seraient trouvées directement par le même raisonnement qui a fourni l'expression (d) $v_0 \pm kj$, en remarquant simplement que l'extrémité commune aux deux parties $k_1 t$, $k_2 t$ a cheminé de ut, et, leurs autres extrémités, de $V_1 t, V_2 t$, en sorte qu'elles se sont accourcies de $(V_1 - u)\, t$, $(u - V_2) t$, qui, divisés par les longueurs $k_1 t$, $k_2 t$, donnent les proportions j_1, j_2 des accroissements.

Au bout du temps

$$t = \frac{a_1}{k_1},$$

la barre a_1, ainsi comprimée jusqu'à son extrémité libre ou non jointive, se dilate à partir de cette extrémité, ce qui ajoute à sa vitesse u, toujours en vertu de (d), une vitesse de détente

$$- k_1 j_1 = - (V_1 - u),$$

en sorte qu'on a, *dans toute cette barre* a_1,

$$(i) \quad \begin{cases} \text{quand } t = \dfrac{2 a_1}{k_1}, \\ v_1 = 2u - V_1 = V_1 - \dfrac{2r}{1+r}(V_1 - V_2) = V_2 - \dfrac{r-1}{r+1}(V_1 - V_2), \\ j_1 = 0. \end{cases}$$

Cette vitesse $2u - V_1$ de toute la barre qui va derrière est moindre que la vitesse u encore possédée par une portion de la barre qui va devant, contiguë au point de leur contact. Mais pour savoir, par la comparaison des vitesses, si elles se sépareront ou non, il faut préalablement diminuer la vitesse u, possédée par cette dernière barre, de *la vitesse de détente*

$$k_2 j_2 = u - V_2$$

due à la compression (h) $j_2 = \frac{u - V_2}{k_2}$ qu'elle a. Cela réduit la vitesse de la seconde barre à

$$V_2.$$

Elles se sépareront donc à l'instant

$$t = \frac{2a_1}{k_1},$$

où le son a parcouru aller et retour la longueur de la première, si V_2 est plus grand que (i) $v_1 = V_2 - \frac{r-1}{1+r}(V_1 - V_2)$, c'est-à-dire si l'on a

$$(j) \qquad r > 1, \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 > m_1 k_1;$$

ou *si la barre que le son met le plus de temps à parcourir d'un bout à l'autre est aussi celle où la masse ébranlée dans un temps donné est la plus grande.*

Si cette condition (j) est remplie, l'on aura pour la vitesse U_1 de toute la première barre, et, par suite, vu la condition de la conservation de quantité du mouvement

$$(k) \qquad m_1 a_1 U_1 + m_2 a_2 U_2 = m_1 a_1 V_1 + m_2 k_2 V_2,$$

pour la vitesse U_2 du centre de gravité de la seconde barre après leur séparation, les expressions

$$(l) \qquad \begin{cases} U_1 = v_1 = V_1 - \dfrac{2 m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}(V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \dfrac{m_1 a_1}{m_2 a_2} \dfrac{2 m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}(V_1 - V_2); \end{cases}$$

qui, dans le cas particulier

$$r = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad m_2 k_2 = m_1 k_1,$$

se réduisent à

$$(m) \qquad \begin{cases} U_1 = V_2, \\ U_2 = V_2 + \dfrac{m_1 a_1}{m_2 a_2}(V_1 - V_2) \; [*]. \end{cases}$$

---

[*] Ce cas $r = 1$ comprend celui où les deux barres sont de même matière et d'égale section. MM. William Thompson et Tait, aux n[os] 302 à 305 d'un Cours de *Natural*

Mais si l'on a

$$(n) \qquad r < 1, \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 < m_1 k_1,$$

Philosophy actuellement sous presse (janvier 1867), démontrent simplement le résultat (m) $U_1 = V_2$ en remarquant : 1° que si les deux barres ont la même longueur, elles prendront et ensuite perdront leurs compressions dans le même temps d'un bout à l'autre, en sorte qu'elles se sépareront avec les mêmes vitesses relatives qu'au moment où elles se sont rencontrées, ou en échangeant leurs vitesses absolues; 2° que si elles sont d'inégale longueur, la plus courte, après le choc, sera exactement dans le même état que si elle en avait frappé une autre ayant sa longueur.

Le savant M. Rankine, qui cite ce passage de ses illustres compatriotes à la suite d'un extrait de mon Mémoire du 24 décembre 1866, publié par lui au n° 58 (15 février 1867) du Journal *The Engineer*, p. 133, y a ajouté une démonstration simple et ingénieuse de mes formules plus générales (l). Elle consiste à observer que le raisonnement de tous les Traités de Physique, fournissant les formules connues

$$U_1 = V_1 - \frac{2 m_2 a_2}{m_1 a_1 + m_2 a_2}(V_1 - V_2),$$

$$U_2 = U_2 + \frac{2 m_1 a_1}{m_1 a_1 + m_2 a_2}(V_1 - V_2),$$

est parfaitement légitime si le son, et par conséquent la compression et ensuite la détente, se propagent pendant le même temps d'un bout à l'autre des deux barres, ou si $\frac{a_1}{k_1} = \frac{a_2}{k_2}$; mais que si le son parcourt en un moindre temps la longueur de la première barre, ou si $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$, elle se trouve affectée comme si elle n'avait heurté, au lieu de la masse entière $m_2 a_2$ de la seconde barre, qu'une masse égale à la sienne $m_1 a_1$ multipliée par le rapport $\frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$ de celles qui s'ébranlent dans la deuxième et dans la première pendant un même temps quelconque; en sorte que, pour avoir U_1, il faut, dans son expression précédente, mettre ce rapport à la place de celui $\frac{m_2 a_2}{m_1 a_1}$ des deux masses. Or cela donne précisément la première de mes formules nouvelles (l), dont la seconde se déduit par le principe de conservation de la quantité totale de mouvement.

Si je conserve ma démonstration élémentaire sans y substituer celle-ci, c'est qu'elle donne le détail de ce qui se passe, et permet d'apprécier dans quel cas les formules (l) cessent d'être applicables, en fournissant le moyen d'en établir alors d'autres (s).

les deux barres ne peuvent pas se séparer, comme nous venons de voir, à l'instant $t = 2\frac{a_1}{k_1}$, et elles restent unies après cet instant.

Or je dis que si

$$n$$

est la partie entière du nombre de fois que $\frac{a_2}{k_2}$ contient $\frac{a_1}{k_1}$, ou si

$$(o) \qquad n\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (n+1)\frac{a_1}{k_1},$$

l'on a, n' étant tout nombre entier n'excédant pas n,

$$(p) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à l'instant } t = 2n'\frac{a_1}{k_1}, \\ \text{dans toute la barre } a_1, \quad v_1 = V_2 + \frac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'}}(V_1 - V_2), \quad j_1 = 0; \\ \text{et, dans une partie de la barre } a_2 \text{ contiguë au point de jonction,} \\ v_2 = V_1 + \frac{(1-r)^{n'-1}}{(1+r)^{n'}}(V_1 - V_2), \quad j_2 = \frac{(1-r)^{n'-1}}{(1+r)^{n'}}\frac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{array} \right.$$

Pour le démontrer, remarquons d'abord en général que si les deux barres agissant l'une sur l'autre avec des vitesses V_1, V_2, avaient, en même temps, et respectivement, au moment de leur rencontre, des compressions

$$J_1, \quad J_2,$$

au lieu de se trouver dans l'état naturel ou sans compression comme nous l'avons précédemment supposé, elles auraient ensuite, de part et d'autre de leur point de contact, une vitesse u' et des compressions j_1, j_2 données par les expressions (h) où l'on ajouterait, aux vitesses acquises V_1, V_2, les *vitesses de détente* $k_1 J_1$, $-k_2 J_2$ dues aux compressions J_1, J_2, c'est-à-dire où l'on mettrait

$$\left\{ \begin{array}{lll} & V_1 + k_1 J_1, & V_2 - k_2 J_2, \\ \text{à la place de} & V_1, & V_2; \end{array} \right.$$

c'est-à-dire qu'elles auraient ensuite une vitesse et des compressions

$$(q)\quad \begin{cases} u' = v_1 = v_2 = \dfrac{V_1 + k_1 J_1 + r(V_2 - k_2 J_2)}{1+r}, \\ j_1 = r\dfrac{V_1 + k_1 J_1 - (V_2 - k_2 J_2)}{(1+r)k_1}, \quad j_2 = \dfrac{V_1 + k_1 J_1 - (V_2 - k_2 J_2)}{(1+r)k_2}. \end{cases}$$

En effet : 1° la réaction élastique due à la compression J_1 de la première barre est capable d'imprimer, pendant le temps t, une vitesse $k_1 J_1$ à la partie de cette barre dont $k_1 t$ est la longueur et $m_1 k_1 t$ la masse, puisqu'elle l'allonge de $k_1 t . J_1$ par détente, et fait cheminer d'autant son extrémité supposée libre; elle imprime donc au système, dans le même temps t, une quantité de mouvement $m_1 k_1 t . k_1 J_1$. De même la réaction élastique due à la compression J_2 de la seconde barre en imprime une $-m_2 k_2 t . k_2 J_2$. Ajoutant ces deux quantités de mouvement à la quantité de mouvement primitive

$$m_1 k_1 t . V_1 + m_2 k_2 t . V_2$$

des deux mêmes parties de barre, et égalant la somme à celle

$$(m_1 k_1 t + m_2 k_2 t) u'$$

que ces parties possèdent au bout du même temps t, l'on obtient bien la première expression (q).

2° Comme l'extrémité commune à ces deux portions des barres a cheminé de $u't$, et comme les autres extrémités des mêmes portions ont cheminé respectivement de $V_1 t$, $V_2 t$, leurs accourcissements sont de $(V_1 - u')t$, $(u' - V_2)t$; d'où, en divisant par les longueurs, et en ajoutant, aux quotients, les compressions primitives, on déduit pour les proportions nouvelles de leurs compressions

$$j_1 = J_1 + \frac{V_1 - u'}{k_1}, \quad j_2 = J_2 + \frac{u' - V_2}{k_2},$$

identiques aux deux dernières expressions (q).

Or, supposons un instant que les formules à démontrer (p) l'aient déjà été pour une certaine valeur de n' au-dessous de n.

Les deux barres prendront après l'instant considéré $t = 2n'\frac{a_1}{k_1}$, de part et d'autre de leur jonction, une vitesse et des compressions nou-

velles, que l'on obtiendra par les formules (q) écrites tout à l'heure, ou en mettant comme nous disons, dans (h), la vitesse actuelle (p) v_1 de a_1 à la place de V_1, et, à la place de V_2, la vitesse (p) v_2 de a_2, diminuée de $k_2 j_2$ qui serait due à la détente de la compression (p) j_2 de cette deuxième barre. Il résultera de cette substitution :

$$(r)\quad\begin{cases}\text{qu'après l'instant } t = 2n'\dfrac{a_1}{k_1}, \text{ on aura, au point de jonction,}\\ v_1 = v_2 = V_2 + \dfrac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}}(V_1 - V_2),\\ j_1 = \dfrac{r(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}}\dfrac{V_1 - V_2}{k_1}, \quad j_2 = \dfrac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}}\dfrac{V_1 - V_2}{k_2}.\end{cases}$$

Ces valeurs de v_2 et de j_2 subsisteront, pour une portion de la barre a_2 contiguë à la barre a_1, au delà du temps $2\frac{a_1}{k_1}$ pendant lequel celle-ci acquerra sur toute sa longueur, puis perdra, la compression (r) j_1; c'est-à-dire subsisteront jusqu'après l'instant

$$t = (2n' + 2)\frac{a_1}{k_1};$$

mais celles qui sont relatives à la barre a_1 devront alors être remplacées par

$$j_1 = 0, \quad v_1 = \text{la valeur } (r) \text{ en en soustrayant } k_1 j_1,$$

vu la détente qu'elle a éprouvée en commençant par son extrémité libre, depuis un premier temps écoulé $\frac{a_1}{k_1}$, ou depuis l'instant $t = (2n' + 1)\frac{a_1}{k_1}$ où la vitesse v_1 et la compression j_1 données par (r) ont embrassé la totalité de cette barre. On trouvera, au moyen de cette soustraction, précisément :

$$\begin{cases}\text{A l'instant } t = 2(n' + 1)\dfrac{a_1}{k_1},\\ v_1 \text{ et } v_2, \quad j_1 \text{ et } j_2 = \text{les expressions } (p) \text{ avec } n' + 1 \text{ au lieu de } n'.\end{cases}$$

Or ces expressions (p) sont prouvées pour

$$n' = 1,$$

puisqu'elles ne sont autre chose, alors, que les expressions (h) pour

v_2 et j_2, et les expressions (i) pour v_1 et j_1. Elles sont donc prouvées, *ainsi que les formules* (r) *qui s'en déduisent*, pour toutes les valeurs $n' = 2, 3, \ldots$ jusqu'à n inclusivement.

Pour déduire de là les vitesses à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k_2},$$

supposons d'abord

$$2\frac{a_2}{k_2} \quad \text{compris entre} \quad 2n\frac{a_1}{k_1} \quad \text{et} \quad (2n+1)\frac{a_1}{k_1},$$

ce qui est une des deux hypothèses qu'on peut faire quand on a (o) $n\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (n+1)\frac{a_1}{k_1}$. La barre a_1 qui, à l'instant $t = 2n\frac{a_1}{k_1}$, avait tout entière la vitesse v_1 donnée par l'expression (p) avec n au lieu de n', n'aura plus, à l'instant $t = 2\frac{a_2}{k_2}$, cette vitesse que sur ce qui restera de sa longueur a_1, du côté de l'extrémité libre non jointive, quand on en aura retranché, du côté du point de jonction, une partie égale à la célérité k_1 multipliée par le temps écoulé $2\frac{a_2}{k_2} - 2n\frac{a_1}{k_1}$. La vitesse de cette partie sera devenue celle qui est donnée par (r) avec n au lieu de n'. La barre a_1 se composera donc, à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k_2},$$

$$\begin{cases} \text{D'une partie } (2n+1)a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \text{ ayant une vitesse } V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n (V_1 - V_2), \\ \text{D'une partie } \quad 2\frac{k_1}{k_2}a_2 - 2na_1 \quad \text{ ayant une vitesse } V_2 + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}}(V_1 - V_2). \end{cases}$$

Multipliant les longueurs par les vitesses, et divisant par la longueur totale a_1, l'on a la première des deux expressions suivantes, dont la seconde n'est que ce qui résulte du principe (k) $\mathrm{m}_1 a_1 U_1 + \mathrm{m}_2 a_2 U_2 = \mathrm{m}_1 a_1 V_1 + \mathrm{m}_2 a_2 V_2$:

$$(s) \qquad \begin{cases} U_1 = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \left(1 - 2r\frac{\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n}{1+r}\right)(V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \frac{\mathrm{m}_1 a_1}{\mathrm{m}_2 a_2}(V_1 - U_1). \end{cases}$$

Nous n'avons pas besoin de faire un calcul analogue pour le cas où $2\frac{a_2}{k_2}$ est compris entre $(2n+1)\frac{a_1}{k_1}$ et $(2n+2)\frac{a_1}{k_1}$, ce qui est la seconde des deux suppositions possibles quand $n\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (n+1)\frac{a_1}{k_1}$. On trouverait la même chose, car, dans ces deux suppositions, la barre a_2 se compose toujours de $n+1$ parties ayant nécessairement des longueurs et des vitesses partielles exprimées de même, ce qui donnerait, pour la vitesse du centre de gravité de cette barre, et par conséquent pour celle du centre de gravité de la barre a_1, des expressions aussi les mêmes.

Prouvons maintenant que les deux barres, quand $r < 1$, ou quand elles ne se sont pas séparées à l'instant $t = 2\frac{a_1}{k_1}$, se séparent nécessairement à l'instant $t = \frac{2a_2}{k_2}$ pour lequel nous venons de calculer les vitesses (s) de leurs centres de gravité.

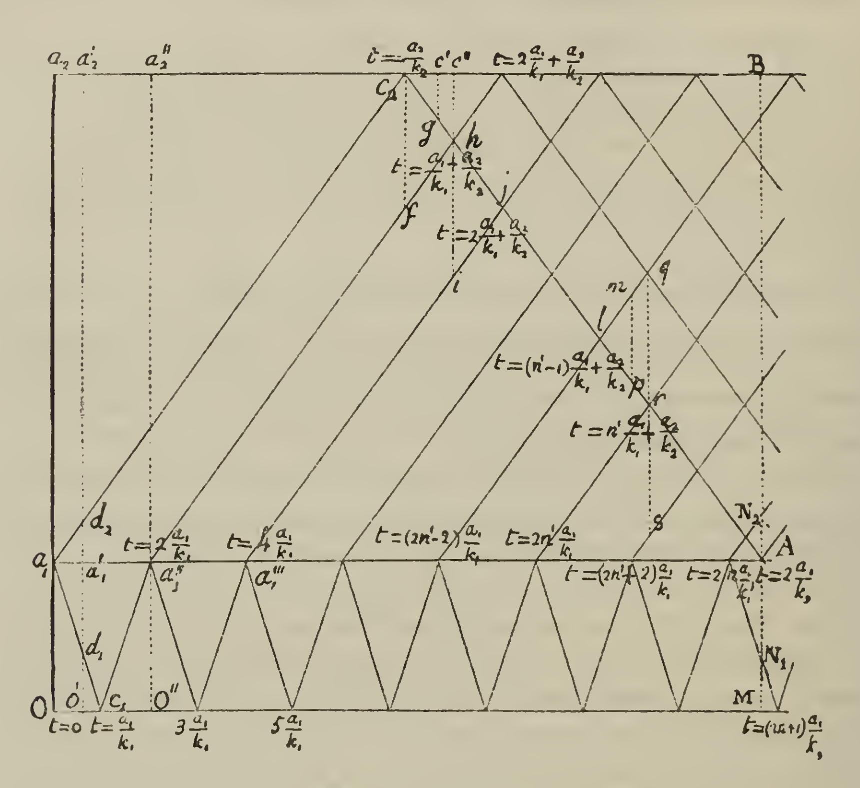
Nous le ferons d'une manière claire au moyen d'une construction peignant la manière dont les barres, aux instants successifs, se divisent en plusieurs parties quant aux compressions et aux vitesses.

Prenons pour abscisses, comptées à partir d'un point d'origine O sur une droite OM, les temps t depuis l'instant $t = 0$ de la rencontre des deux barres, et, pour ordonnées, portées parallèlement à une orthogonale $\mathrm{O}a_1a_2$, les distances de leurs divers points à l'extrémité libre de la première a_1, ces distances étant conservées dans leurs grandeurs primitives, ou en abstrayant les petits accourcissements et allongements éprouvés. Si $\mathrm{O}a_1$, a_1a_2 sont les longueurs a_1, a_2 des deux barres, et si, après avoir porté sur la ligne d'abscisses OM et sur les deux parallèles $a_1\mathrm{A}$, $a_2\mathrm{B}$ les abscisses qui y sont cotées, savoir :

$$t = \frac{a_1}{k_1},\quad 3\frac{a_1}{k_1},\ldots;\quad t = 2\frac{a_1}{k_1},\quad 4\frac{a_1}{k_1},\ldots,\quad 2\frac{a_2}{k_2},\ldots;\quad t = \frac{a_2}{k_2},\quad 2\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2},\ldots,$$

l'on joint, par les lignes obliques de la figure, les points ainsi déterminés, toute droite verticale ou parallèle à $\mathrm{O}a_1a_2$, comprise entre les horizontales OM et $a_2\mathrm{B}$, donnera, pour l'instant marqué par son abscisse, et entre les points où elle coupe ces diverses lignes ainsi que $a_1\mathrm{A}$,

les longueurs des parties des barres dont les compressions ainsi que les vitesses auront des grandeurs différentes; en sorte que les intersections marqueront les endroits où ces vitesses et ces compressions passent brusquement d'une grandeur à une autre. Ainsi la verticale $O' a'_1 a'_2$,



dont l'abscisse $t = a_1 a'_1$ indique un instant compris entre ceux $t = 0$ et $t = \frac{a_1}{k_1}$, donne, par ses intersections d_1, d_2 avec les obliques $a_1 c_1$, $a_1 c_2$, les longueurs $k_1 t = a'_1 d_1$, $k_2 t = a'_1 d_2$ des deux barres où les vitesses et les compressions sont v_1 et j_1, v_2 et j_2 représentées par les formules (h); tandis que les parties $O' d_1$, $d_2 a'_2$ ont encore les vitesses primitives V_1, V_2 avec des compressions nulles.

Et la verticale $O'' a''_1 a''_2$ dont l'abscisse est celle de l'instant

$$t = \frac{a_1}{k_1},$$

fournit, entre a''_1 et son intersection avec a_1c_2, la longueur

$$2\frac{k_2}{k_1}a_1$$

de la partie de la barre a_2 contiguë au point de jonction; partie qui à cet instant possède la vitesse et la compression données encore par (h), tandis que toute la barre $a_1 = O''a''_1$, dont la compression se trouve redevenue nulle, est animée de la vitesse donnée par (i).

Plus tard (si les barres ne se séparent pas alors), quand arrive l'instant

$$t = \frac{a_2}{k_2} = a_2c_2,$$

la ligne verticale fc_2 montre qu'une portion de la barre a_2, de même longueur $2\frac{k_2}{k_1}a_1$ que celle dont il vient d'être question, possède encore cette même vitesse et cette même compression (h)

$$v_2 = u = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r}, \quad j_2 = \frac{u - V_2}{k_2}.$$

Mais comme cette portion comprimée arrive à être contiguë à l'extrémité libre c_2, la barre a_2 commence alors à se détendre à partir de cette extrémité; elle prend en conséquence, conformément à l'expression générale (d) $v = v_0 + kj$, et sur une portion telle que $c'g$ ou $c''h$, qui croît avec une célérité k_2 :

$$(t)\quad \begin{cases} \text{une vitesse nouvelle } v_2 = u + k_2\dfrac{u - V_2}{k_2} = V_2 + 2\dfrac{V_1 - V_2}{1+r}, \\ \text{et une compression } j_2 = 0. \end{cases}$$

Cette détente se propage vers le bas ainsi que la vitesse v_2 donnée par (t), jusqu'à ce qu'elle se croise, en h, dans la même barre a_2, avec la compression qui est partie, à l'instant $t = 2\frac{a_1}{k_1}$, de son extrémité a''_1 joignant la barre a_1, c'est-à-dire jusqu'à l'instant

$$t = \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}, \quad \text{abscisse du point } h.$$

A ce dernier instant, sur une longueur ih, aussi égale à $fc_2 = 2\frac{k_2}{k_1}a_1$, mais comptée en deçà du point h où le croisement s'opère, la barre a_2 possède la vitesse et la compression qu'elle a eues, au point de sa jonction avec l'autre barre, entre l'instant $t = 2\frac{a_1}{k_1} = a_1 a_1''$, et l'instant

$$t = 4\frac{a_1}{k_1} = a_1 a_1''';$$

instant où il est parti, de a_1''', une nouvelle compression qui produira, en j, un autre croisement lorsque arrivera l'instant subséquent

$$t = 2\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}.$$

En continuant ce raisonnement, et en considérant ce qui se passe dans la même barre a_2 lors du croisement de sa détente, à l'endroit et à l'instant marqués par le point l, avec la compression qui est partie du point de sa jonction avec l'autre barre à l'instant antérieur

$$t = (2n' - 2)\frac{a_1}{k_1},$$

il nous sera facile de prouver qu'on a

(u) Après l'instant $t = (n' - 1)\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}$ de ce croisement, et de part et d'autre de l'endroit l où il s'opère

$$(u)\quad \begin{cases} v_2 = V_2 + \dfrac{V_1 - V_2}{1 + r} + \dfrac{(1 - r)^{n'-1}}{(1 + r)^{n'}}(V_1 - V_2), \\ j_2 = -\dfrac{V_1 - V_2}{(1 + r)k_2} + \dfrac{(1 - r)^{n'-1}}{(1 + r)^{n'}}\dfrac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{cases}$$

Supposons en effet ces expressions prouvées pour une certaine valeur de n', au plus égale à $n - 1$. Elles continueront de représenter la vitesse et la compression de la barre a_2 dans une portion croissante, telle que mp, qr, jusqu'à l'instant

$$t = n'\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}$$

d'un croisement subséquent, s'opérant en r par la rencontre de la détente, qui continue sa marche descendante, avec la compression qui est partie, en sens contraire, du point de jonction avec la barre a_1 à l'instant $t = 2n'\frac{a_1}{k_1}$. Alors, c'est-à-dire à l'instant $t = n'\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}$, si qrs est une verticale ou une portion d'ordonnée, l'on a deux parties rq, rs de la barre a_2 qui sont contiguës et qui ont, savoir, la partie rq, allant devant, les vitesses v_2, j_2 données par les formules (u), et, la partie rs, allant derrière, la vitesse et la compression que possédait la barre a_2 au point de sa jonction avec a_1 entre les instants $t = 2n'\frac{a_1}{k_1}$ et $t = (2n'+2)\frac{a_1}{k_1}$, c'est-à-dire la vitesse v_2 et la compression j_2 données par les formules (r), qui ont été démontrées tout à l'heure. Mettant celles-ci à la place de V_1, J_1, et celles-là à la place de V_2, J_2 dans les formules générales (q) comme s'il s'agissait de deux barres, mais en y remplaçant le rapport r par 1, et k_1 par k_2, l'on obtient, pour la vitesse et la compression de la barre a_2,

(v) Après l'instant $t = n'\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}$ et de part et d'autre de l'endroit r où le croisement s'y opère à cet instant,

$$\left\{\begin{aligned} v_2 &= V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r} + \frac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}}(V_1 - V_2),\\ j_2 &= -\frac{V_1 - V_2}{(1+r)k_2} + \frac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}}\frac{V_1 - V_2}{k_2};\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire précisément les formules (u) avec $n'+1$ mis au lieu de n'.

Or ces formules (u) sont prouvées pour $n' = 1$, puisqu'elles ne sont autre chose alors que les formules (t). Elles sont donc vraies pour toute valeur de n' pouvant aller jusqu'à n.

Il en résulte, en mettant maintenant n à la place de n', qu'à l'instant

$$t = 2\frac{a_2}{k_2} = a_1 A$$

qui est entre ceux $t = 2n\frac{a_1}{k_1}$ et $t = (2n+2)\frac{a_1}{k_1}$, et pour deux parties AN_1, AN_2 alors contiguës au point de jonction A des deux barres.

les vitesses et les compressions ont les valeurs

$$\text{Dans la barre } a_1 \left\{ \begin{aligned} v_1 &= V_2 + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}}(V_1 - V_2), \\ j_1 &= r\frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}}\frac{V_1 - V_2}{k_1}. \end{aligned} \right.$$

$$\text{Dans la barre } a_2 \left\{ \begin{aligned} v_2 &= V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r} + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}}(V_1 - V_2), \\ j_2 &= -\frac{V_1 - V_2}{(1+r)\,k_2} + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}}\frac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{aligned} \right.$$

Or on trouve, avec ces valeurs,

$$v_2 - k_2 j_2 > v_1 + k_1 j_1;$$

en effet la substitution donne

$$v_2 - k_2 j_2 - v_1 - k_1 j_1 = \left[\frac{2}{1+r} - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n\right](V_1 - V_2),$$

quantité toujours positive; car puisque n est entre 0 et 1, le premier terme du binôme entre crochets est plus grand que 1, et le second est plus petit que 1.

La vitesse v_2 possédée à l'instant $t = \frac{2a_2}{k_2}$ par la barre qui va devant, diminuée de la vitesse de détente due à sa compression j_2, excède donc la vitesse v_1 possédée par l'autre barre, augmentée de la vitesse de détente due à sa compression j_1. Elles se sépareront donc.

C'est ce qu'on voit également, au reste, par les expressions générales (q) des compressions j_1, j_2 après l'action mutuelle de deux barres, car elles sont négatives lorsque $V_2 - k_2 J_2 - V_1 - k_1 J_1$ est positif; or ces compressions négatives à l'endroit du contact sont impossibles entre deux barres sans adhérence mutuelle.

Donc les formules nouvelles (s) représentent bien les vitesses de translation des deux barres après leur choc dans le cas

$$r < 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad m_2 k_2 < m_1 k_1$$

où la barre le plus tôt parcourue d'un bout à l'autre par le son est celle

dont la masse ébranlée à chaque instant est la plus considérable ; de même que les formules (l) représentent ces vitesses dans l'autre cas $r > 1$ d'abord examiné.

Ce sont les formules (143), (133) du n° **11**, mais démontrées ici d'une manière élémentaire, ou sans établissement ni intégration d'équation différentielle.

17. *Conclusion.* — J'ai cru devoir donner quelque étendue au développement de cette théorie nouvelle du choc de corps parfaitement élastiques, dont l'idée première est due aux méditations de Coriolis et aux courtes recherches faites sur son invitation par Cauchy pour un cas particulier. J'ai fait voir que l'illustre analyste avait énoncé une conclusion juste en ce qui regarde la fin de l'action mutuelle de deux barres de même matière et de même section qui se sont heurtées, et la vitesse finale prise par la plus courte des deux, mais qu'il fallait évaluer autrement qu'il n'a fait la perte de force vive translatoire résultant de ce que l'autre barre conserve ensuite une compression qui la fait vibrer ; et, aussi, qu'il ne suffisait pas en général, pour que le corps heurté se sépare du corps heurtant, que celui-là ait à un certain instant une vitesse plus grande que celui-ci à leur point de jonction, comme M. Cauchy paraît l'avoir cru. J'ai montré que M. Poisson, en jugeant avec raison qu'il fallait tenir compte des compressions dont les deux corps se trouvent affectés au même instant et au même point, exigeait trop en ajoutant, à la condition de l'excès de vitesse, celle que ces compressions fussent nulles dans l'un comme dans l'autre corps, et, aussi, que c'est faute d'avoir aperçu qu'elles pouvaient devenir négatives, qu'il a tiré de ses formules la fausse et singulière conclusion que les barres resteront indéfiniment unies, pour peu que leurs longueurs soient inégales. Elles se séparent toujours à l'instant où leurs compressions à l'endroit du contact prendraient ce signe négatif si elles restaient unies ; condition qui revient, en général, à ce que la vitesse actuelle de la barre heurtée, diminuée de celle de détente due à sa compression, surpasse la vitesse actuelle de la barre heurtante augmentée de la vitesse de détente que sa compression engendrerait quand elle en a une.

J'ai appliqué le même genre de recherches, au moyen de formules

intégrales en termes finis, au cas plus général du choc de deux barres prismatiques de grosseurs et même de matières différentes, en renvoyant à un autre temps le calcul long et compliqué, fait sur une suite d'exemples numériquement définis, des conséquences de formules en série transcendante applicables au choc de deux ou plusieurs corps des formes les plus variées, susceptibles d'être approximativement assimilés à un ensemble de troncs de cône ou de pyramide vibrant par tranches parallèles. La séparation des deux barres prismatiques se fait lorsque le son a parcouru aller et retour celle des deux qui exige pour cela le moins de temps, si c'est en même temps celle dont la masse ébranlée ou comprimée à chaque instant est la plus petite; dans le cas contraire la séparation s'opère lorsque le son a parcouru aller et retour celle des deux qui exige pour cela le temps le plus long. J'ai montré, en examinant ce que deviennent ensuite les deux barres, que leurs vibrations ne les feront pas se rejoindre, ou que leur séparation est définitive dans les deux cas énoncés.

Les formules de vitesses finales, dans ces deux cas, sont différentes. Celles du second cas, sans avoir rien de compliqué, contiennent *en exposant* le nombre variable des réflexions éprouvées par le son dans la première barre.

Je donne de ces formules, comme des premières, une démonstration élémentaire susceptible de passer généralement dans l'enseignement; et, à cette occasion, je démontre, aussi élémentairement et d'une manière extrêmement simple, l'expression de la vitesse de propagation du son, ce qui n'a pas été fait à ma connaissance depuis la démonstration de Newton, qu'aucun auteur moderne de Cours de physique n'a regardée comme acceptable et susceptible d'être introduite dans ses leçons.

J'aurais pu borner mon travail à ces sortes de démonstrations. Mais les solutions analytiques, telles que celles qui m'ont conduit aux résultats présentés, portent leur genre de conviction comme les solutions synthétiques, et ce n'est pas trop du concours de deux genres de recherches et de raisonnements pour établir complétement des résultats tout nouveaux et controversés. Et puis, il eût manqué quelque chose, savoir la preuve que les deux barres, après s'être séparées pendant un temps fini, ne se rejoindront pas en vibrant.

Mon analyse d'ailleurs, aidée de ces tableaux raisonnés (94) de scissions de limites, ainsi que de ces *diagrammes* dont chacun remplace un grand nombre de pages de formules (et qui me paraissent offrir généralement le seul moyen d'éviter d'innombrables confusions dans la détermination des valeurs diverses de fonctions *discontinues* de deux variables telles que x et t) [*], donne d'une manière complète ce que devient jusqu'à une époque quelconque, et dans toutes ses parties, l'ensemble de deux ou plusieurs barres restant unies : problème d'autant plus intéressant par lui-même qu'il suffit d'en modifier légèrement la solution pour la rendre applicable non-seulement au cas où la barre heurtée est fixe à un bout, mais même au problème des vibrations transversales d'une corde flexible se composant de plusieurs parties de grosseurs et de matières différentes. Je pense donc que les développements analytiques où je suis entré pourront être jugés utiles indépendamment du but principal dont la poursuite m'a fait entreprendre ces longues et délicates recherches.

ERRATA.

Page 258, au bas du diagramme (24), au point T. La formule $kt = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3$ aurait dû être écrite horizontalement.

258, même diagramme, à droite, deux lignes au-dessus du point T, *au lieu de* $-kJ_3 + V_3$, *lisez* $-kJ_1 + V_1$.

259, ligne 3, *au lieu de* voyez le n° 15, *lisez* voyez le n° 16.

260, au bas et à droite de chacun des deux diagrammes (27) (28), *au lieu de* $x - kt = -a_1 - a_2$, *lisez* $x - kt = -a_1 - 2a_2$.

260 et 272, sur la ligne ponctuée horizontale du diagramme (28), *au lieu de* $x = a$, *lisez* $x = a_1$.

261, ligne 4 en remontant, *au lieu de* $a_1 - (2a_1 - a_2)$, *lisez* $a_2 - (2a_1 - a_2)$.

283, ligne 10 en remontant, *au lieu de* (51), *lisez* (50).

---

[*] Ils ont été gravés par le procédé *paniconographique* de M. Gillot, qui transforme à peu de frais un dessin lithographique en un cliché-relief. Le peu de netteté des nos (89), (118), (119), (148), (150), (151), (152), ne doit être attribué qu'à ce que j'en ai fait moi-même le dessin et la lettre sur papier à autographier, le temps m'ayant manqué pour recourir à la plume exercée d'un calligraphe ou au burin d'un graveur sur pierre.

Page 287, formule (61), *au lieu de* $\frac{m_1 k_1}{m_2 k_2}$, *lisez* $\frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$.

290, ligne 8, *au lieu de* $\left(\frac{du_2}{dx_2}\right)_{x_1=0}$, *lisez* $\left(\frac{du_2}{dx_2}\right)_{x_2=0}$.

295, dernière ligne, *au lieu de* $-2\frac{k_1}{k_2}a_2, -\frac{k_1}{k_2}a_2$, *lisez* $-2\frac{k_2}{k_1}a_1, -\frac{k_2}{k_1}a_1$.

300, ligne 12, *au lieu de* $t = 2\tau$, *lisez* $t = 2\tau_1$.

305, ligne 11, *au lieu de* $\frac{V_1 - V_2}{(1+r)^2} = W_m$, *lisez* $\frac{V_1 - V_2}{(1+r)^3} = W_m$.

307, ligne 9 [ou dernière ligne de (102)], *au lieu de* $a_1 + 2a_1$, *lisez* $a_1 + 2a_2$.

315, ligne 2 du premier $F'_1\{\ \}$, *au lieu de* $-(2i'+1)a_1$, *lisez* $-(2i'-1)a_1$.

318, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $2W_1$, *lisez* $2W_i$.

319, avant-dernière ligne, *au lieu de* $-6\frac{k_1}{k_2}a_2$, *lisez* $-6\frac{k_2}{k_1}a_1$.

325, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $\frac{du_4}{dt}$, *lisez* $\frac{du_1}{dt}$.

326, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2$, *lisez* $a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1$.

327, ligne 4, *au lieu de* $m_1 a_1 = M$, *lisez* $m_1 a_1 = M_1$.

327, ligne 3 en remontant, *au lieu de* W'_1, W_1, *lisez* W'_i, W_i.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES RÉSIDUS BIQUADRATIQUES;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

INTRODUCTION.

Je vais indiquer les résultats auxquels je suis arrivé dans ce Mémoire; mais auparavant il est utile de rappeler les premières recherches qui ont été faites sur la théorie des résidus biquadratiques fondée par Gauss.

D'abord, soit N un nombre quelconque; il est résidu quadratique du nombre premier p si on peut poser

$$N = a^2 + Mp \quad \text{ou} \quad N \equiv a^2 \pmod{p};$$

si de plus on peut poser

$$N = b^4 + Mp \quad \text{ou} \quad N \equiv b^4 \pmod{p},$$

N est dit *résidu biquadratique* de p, et il est évident que tout résidu biquadratique est aussi résidu quadratique.

Mais l'inverse a lieu aussi, comme il est très-aisé de le voir, lorsque le module est de la forme $4n+3$, de sorte que tout résidu quadratique d'un nombre premier de la forme $4n+3$ est également un résidu biquadratique; et il en résulte qu'il suffit d'étudier le caractère biquadratique des nombres par rapport aux nombres premiers p de la forme $4n+1$; nous supposerons donc désormais que le module ait cette forme.

Désignons par g une racine primitive quelconque du nombre premier $p = 4n + 1$, et formons les résidus des nombres

$$g^0,\ g,\ g^2, \ldots,\ g^{p-2};$$

puis partageons-les en quatre groupes correspondant aux quatre groupes des puissances de g :

$$\begin{array}{l} g^0,\ g^4,\ g^8,\ g^{12}, \ldots, \\ g,\ g^5,\ g^9,\ g^{13}, \ldots, \\ g^2,\ g^6,\ g^{10},\ g^{14}, \ldots, \\ g^3,\ g^7,\ g^{11},\ g^{15}, \ldots, \end{array}$$

et désignons ces groupes respectivement par les lettres A, B, C, D. Les nombres du groupe A sont les résidus biquadratiques de p; ceux du groupe C sont les résidus quadratiques qui ne sont pas en même temps biquadratiques; enfin les nombres des groupes B et D sont des non-résidus quadratiques, et à plus forte raison des non-résidus biquadratiques.

Les deux groupes A et C ne dépendent en aucune façon de la racine primitive que l'on a choisie; mais les deux groupes B et D peuvent s'échanger l'un dans l'autre par un changement de cette racine, et, pour qu'ils soient parfaitement déterminés, il faut donc spécifier la racine primitive que l'on choisit; pour cet effet, nous supposerons que l'on adopte toujours pour g la plus petite racine primitive.

p, étant de la forme $4n + 1$, est décomposable en la somme de deux carrés $a^2 + b^2$ et d'une seule manière; mais comme il faut que a et b soient parfaitement déterminés, on désigne par a le nombre impair et par b celui qui est pair; enfin il convient de choisir les signes de a et b de manière que le nombre impair

$$a \text{ soit} \equiv 1 \pmod{4}$$

et

$$b \equiv a g^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

g étant, comme nous l'avons dit, la plus petite racine primitive de p.

Cela posé, pour déterminer le caractère biquadratique d'un nombre quelconque N par rapport au nombre premier p, on peut suivre une méthode analogue à celle qui permet de trouver son caractère quadratique. On décompose encore le nombre donné en ses facteurs premiers; mais on ne regarde plus comme premiers tous ceux qui sont ainsi désignés ordinairement dans l'arithmétique; car les nombres premiers réels de la forme $4n+1$ sont considérés comme décomposables en deux nombres $c+di$, $c-di$, qui sont dits *nombres premiers complexes*. Enfin, décomposant le module en les deux facteurs $a+bi$, $a-bi$, il suffit de chercher le caractère du nombre N par rapport au nombre premier complexe $a+bi$.

Parmi les quatre nombres

$$c+di, \quad -d+ci, \quad -c-di, \quad d-ci,$$

qui sont dits *associés* et qui ne diffèrent que par le facteur i, -1 ou $-i$, il y en a un qui est $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ et qui est appelé nombre *primaire*. Or on a à chercher le caractère biquadratique de chaque facteur de N par rapport à $a+bi$; il sera aisé de ramener cette recherche à ne s'effectuer que sur des nombres premiers primaires, et chacune de ces déterminations s'opérera par l'application à ces nombres du théorème fondamental (*Theoria residuorum biquadraticorum*, § 67), théorème tout à fait analogue à la loi de réciprocité de la théorie des résidus quadratiques.

Toutefois l'application du théorème fondamental peut être facilitée par la remarque suivante, due à Jacobi :

Soit l un nombre complexe quelconque et m un autre nombre semblable, mais premier. On désigne par $\left[\frac{l}{m}\right]$ les quantités 1, i, -1 ou $-i$, suivant que

$$l^{\frac{\mu-1}{4}} \text{ est congru à } 1,\ i,\ -1 \text{ ou } -i \pmod{m},$$

μ étant la norme de m, et si l'on pose

$$\left[\frac{l}{m}\right] = i^{\lambda},$$

λ désigne le caractère du nombre l par rapport au nombre premier m.

Si de plus, lorsque n est un nombre composé $tt't''\ldots$, où t, t', t'',.. sont premiers, on convient que $\left[\frac{l}{n}\right]$ représente le produit

$$\left[\frac{l}{t}\right]\left[\frac{l'}{t'}\right]\left[\frac{l''}{t''}\right]\ldots,$$

alors on a le théorème suivant : « *Si* $A+Bi$ *et* $C+Di$ *sont deux entiers complexes premiers entre eux* $\equiv 1 \pmod{2+2i}$, *on a*

$$\left[\frac{A+Bi}{C+Di}\right] = \left[\frac{C+Di}{A+Bi}\right](-1)^{\frac{A-1}{2}\frac{C-1}{2}};$$

ce qui se réduit au théorème fondamental, lorsque $A+Bi$ et $C+Di$ sont deux nombres premiers.

Quant au théorème fondamental, Eisenstein en a donné deux démonstrations différentes dans le tome XXVIII du *Journal de Crelle*.

Mais Gauss indique une autre méthode pour déterminer le caractère biquadratique d'un nombre N par rapport à un nombre premier $p = 4n+1$; supposons encore p décomposé en la somme de deux carrés a^2+b^2, les signes de a et b étant déterminés comme nous avons dit ci-dessus. Gauss a reconnu par induction que le caractère biquadratique d'un nombre premier $\pm q$, le signe $\pm$ ayant lieu suivant que $q = 4n \pm 1$, dépend uniquement de la valeur de $\frac{b}{a} \pmod{q}$. Ainsi soient deux nombres premiers $p = a^2+b^2$, $p' = a'^2+b'^2$, a' et b' étant déterminés comme a et b ; si $\frac{b}{a}$ et $\frac{b'}{a'}$ sont congrus suivant le module q, $\pm q$ a le même caractère par rapport à p et à p'. Mais il ne nous apprend rien sur la possibilité de reconnaître quels sont ceux des rapports $\frac{b}{a}$ qui appartiennent aux quatre classes correspondant respectivement aux groupes A, C ou B et D, et qui sont propres à indiquer si $\pm q$ est résidu biquadratique, résidu simplement quadratique ou non-résidu.

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 18 mars 1867, j'ai donné la loi qui distingue les quatre classes, et de laquelle Gauss avait dit : *At lex hujus distributionis abstrusior videtur, etiamsi*

quædam generalia prompte animadvertantur [*]. Je donnerai dans ce Mémoire la démonstration de la solution de cette question. Mais voici d'abord de cette solution une forme géométrique qui en facilite le souvenir et qui me semble fort curieuse, encore que cette forme ne soit pas celle qui convient à l'application du calcul.

Considérons séparément les cas de $q = 4n + 1$ et de $q = 4n + 3$.

1° Si q est de la forme $4n + 1$, divisons la demi-circonférence π en $q - 1$ parties égales et considérons les tangentes des arcs

$$0, \quad \frac{\pi}{q-1}, \quad 2\frac{\pi}{q-1}, \quad 3\frac{\pi}{q-1}, \ldots, \quad (q-2)\frac{\pi}{q-1}.$$

On sait que ces tangentes sont exprimables par radicaux; et de plus il est remarquable que ces radicaux, pris suivant le module q, sont toujours des nombres entiers réels, de sorte que les expressions de ces tangentes, prises suivant le module q, représentent elles-mêmes des nombre entiers réels. Or q appartiendra au groupe A, B, C ou D, selon que $\frac{b}{a}$ sera congru suivant le module q à la tangente d'un des arcs commençant à l'origine de la demi-circonférence et terminés aux points de division 0, 4, 8,..., ou 1, 5, 9,..., ou 2, 6, 10,..., ou 3, 7, 11,....

2° Si q est de la forme $4n + 3$, divisons la demi-circonférence $-\pi$ en $q + 1$ parties égales et considérons les tangentes des arcs

$$0, \quad -\frac{\pi}{q+1}, \quad -2\frac{\pi}{q+1}, \quad -3\frac{\pi}{q+1}, \ldots, \quad -q\frac{\pi}{q+1},$$

qui commencent à l'origine de la circonférence et se terminent à des points de division que nous marquerons 0, -1, -2,.... Non-seulement les tangentes de ces arcs sont exprimables par radicaux, mais leurs expressions prises suivant le module q sont des nombres entiers réels. Et le nombre $-q$ appartient au groupe A, B, C ou D, selon que $\frac{b}{a}$ est congru suivant le module q à la tangente d'un arc terminé aux points de division 0, -4, -8,..., ou -1, -5, -9,..., ou -2, -6, -10,..., ou -3, -7, -11,....

---

[*] *Höhere Arithmetik*, p. 100.

On peut encore donner à ce théorème une forme plus concise en réunissant les cas de $q = 4n + 1$ et de $q = 4n + 3$. En effet, si l'on pose $\pm q = \tau$, on a le théorème suivant :

Considérons les tangentes des arcs

$$0,\quad \frac{\pi}{\tau - 1},\quad 2\frac{\pi}{\tau - 1},\quad 3\frac{\pi}{\tau - 1}, \ldots :$$

elles sont exprimables par radicaux, et leurs expressions prises suivant le module q sont des nombres entiers. Posons

$$\begin{array}{lll} \alpha = \operatorname{tang} 0, & \operatorname{tang} 4\frac{\pi}{\tau - 1}, & \operatorname{tang} 8\frac{\pi}{\tau - 1}, \ldots, \\ \beta = \operatorname{tang}\frac{\pi}{\tau - 1}, & \operatorname{tang} 5\frac{\pi}{\tau - 1}, & \operatorname{tang} 9\frac{\pi}{\tau - 1}, \ldots, \\ \gamma = \operatorname{tang} 2\frac{\pi}{\tau - 1}, & \operatorname{tang} 6\frac{\pi}{\tau - 1}, & \operatorname{tang} 10\frac{\pi}{\tau - 1}, \ldots, \\ \delta = \operatorname{tang} 3\frac{\pi}{\tau - 1}, & \operatorname{tang} 7\frac{\pi}{\tau - 1}, & \operatorname{tang} 11\frac{\pi}{\tau - 1}, \ldots ; \end{array}$$

suivant que $\frac{b}{a}$ sera congru suivant le module q à l'un des nombres α, β, γ ou δ, τ appartiendra respectivement à A, B, C ou D.

Par exemple, s'agira-t-il du caractère biquadratique de $q = 5$, divisant la demi-circonférence en $q - 1 = 4$ parties égales, on voit que l'on a

$$\operatorname{tang} 0 = 0,\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = 1,\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = \infty,\quad \operatorname{tang}\frac{3\pi}{4} = -1 \equiv 4 \pmod{5}.$$

On en conclut que 5 appartient au groupe A, B, C ou D, par rapport à p, selon que $\frac{b}{a}$ est congru suivant le module 5 à 0, 1, ∞ ou 4.

Ces théorèmes de la théorie des résidus biquadratiques fournissent immédiatement ceux-ci, qui sont nouveaux aussi, quoiqu'ils rentrent dans le domaine de la théorie des résidus quadratiques :

1° Soient p et q deux nombres premiers de la forme $4n + 1$, dont l'un p soit égal à $a^2 + b^2$, et ici il n'est besoin d'avoir égard aux signes de a et b, ni même à leur ordre de parité. Divisons la demi-circonfé-

rence en $q-1$ parties égales et menons les tangentes de tous les arcs qui commencent à l'origine de la demi-circonférence et se terminent aux différents points de division. Si la valeur de $\frac{b}{a}$ est congrue suivant le module q à l'expression de la tangente d'un des arcs terminés à un point de division d'ordre pair 0, 2, 4, 6..., le nombre premier p est résidu quadratique de q et q résidu quadratique de p; mais si $\frac{b}{a}$ correspond à une divison impaire, p et q sont non-résidus l'un de l'autre.

2° Si p et q sont deux nombres premiers, dont l'un q est de la forme $4n+3$, tandis que l'autre p est de la forme $4n+1$, on divisera la demi-circonférence en $q+1$ parties égales et on obtiendra les mêmes conséquences que dans le cas précédent.

Ici nous devons faire une réflexion importante sur le choix que nous avons fait de la racine primitive prise pour base. Après avoir distingué, par rapport au module p, tous les nombres non divisibles par p en les quatre groupes A, B, C, D, nous avons dit que, afin de ne laisser aucune ambiguïté sur les groupes B et D, nous supposerons que l'on prenne toujours pour base la plus petite racine primitive g de p. Or il est à remarquer que ce choix n'a pas été fait au hasard, mais en vue de simplifier la théorie, et que par exemple on aurait des résultats plus compliqués si on remplaçait la plus petite par la plus grande racine primitive.

En effet, nous avons dit comment de la loi de réciprocité des résidus biquadratiques donnée par Gauss pour les nombres complexes on peut tirer le caractère biquadratique d'un nombre réel N par rapport à un nombre premier réel $p=a^2+b^2$, et, pour que cette méthode soit applicable, il faut absolument que l'on prenne pour base la plus petite racine primitive g de p. Et de même la méthode que nous avons donnée pour déterminer le caractère biquadratique de p par rapport à $p=a^2+b^2$ au moyen du nombre $\frac{b}{a}$ (mod. q) exige encore ce choix.

Considérations des quatre périodes de $\frac{p-1}{4}$ *racines de la congruence* $\frac{x^p-1}{x-1}\equiv 0 \pmod{q}$. — *Démonstration simple et nouvelle de la loi de réciprocité de la théorie des résidus quadratiques.* — *Théorème nouveau de cette théorie.*

1. Nos recherches sur la théorie des résidus biquadratiques seront entièrement fondées sur l'étude des quatre périodes formées des racines de la congruence

$$(1)\qquad \frac{x^p-1}{x-1}\equiv 0 \pmod{q},$$

dans laquelle p est un nombre premier positif de la forme $4n+1$; en désignant par x une quelconque de ces racines, elles sont représentées par

$$\omega\equiv\sum x^{\rm A},\quad \omega'\equiv\sum x^{\rm B},\quad \omega''\equiv\sum x^{\rm C},\quad \omega'''\equiv\sum x^{\rm D}\pmod{q},$$

le signe sommatoire $\sum$ se rapportant aux différents nombres A, B, C, D, et, d'après ce qui a été dit dans l'Introduction, les quatre groupes A, B, C, D sont les résidus des nombres des quatres lignes

$$\begin{array}{llll} g^0, & g^4, & g^8,\ldots, & g^{p-5},\\ g, & g^5, & g^9,\ldots, & g^{p-4},\\ g^2, & g^6, & g^{10},\ldots, & g^{p-3},\\ g^3, & g^7, & g^{11},\ldots, & g^{p-2}, \end{array}$$

pris par rapport au module p, g désignant la plus petite racine primitive de p.

Désignons par m le plus petit nombre pour lequel est satisfaite la congruence

$$q^m-1\equiv 0 \pmod{p},$$

les racines de la congruence (1) appartiennent toutes à la congruence

$$x^{q^m-1}\equiv 1 \pmod{q},$$

dont l'étude des racines a été faite rigoureusement pour la première fois par M. Serret dans son *Algèbre supérieure*.

Comme l'examen de ces quatre périodes demande une étude longue et attentive, nous commencerons, pour mieux faire comprendre les principes qui nous serviront, à les appliquer à la théorie beaucoup plus simple des résidus quadratiques.

2. Nous considérerons alors les deux périodes de $\frac{p-1}{2}$ racines de la congruence

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} \equiv 0 \pmod{q},$$

qui ont pour valeurs

$$\Omega \equiv \sum x^a, \quad \Omega' \equiv \sum x^b,$$

x désignant une quelconque des racines et le signe $\sum$ se rapportant aux lettres a et b, dont la première désigne un résidu quadratique de p, et la seconde un non-résidu. On suppose ici que p peut être indistinctement de la forme $4n \pm 1$, et on sait (*Disquisitiones arithmeticæ,* 356) que la congruence qui donne ces deux périodes est

$$x^2 + x \mp n \equiv 0 \pmod{q}.$$

Si on élève Ω et Ω' à la puissance q, il est aisé de voir, puisqu'on doit négliger les multiples de q, que l'on aura.

$$\Omega^q \equiv \sum x^{aq}, \quad \Omega'^q \equiv \sum x^{bq} \pmod{q}.$$

Tous les exposants aq et tous les exposants bq sont différents entre eux selon le module p, et de plus, si q est résidu quadratique de p, tous les nombres aq sont des résidus quadratiques, et les nombres bq des non-résidus, et, au contraire, si q est non-résidu quadratique de p, tous les nombres aq sont des non-résidus, et les nombres bq des résidus quadratiques de p.

On en conclut que si q est résidu quadratique on a

$$\Omega^q \equiv \Omega, \quad \Omega'^q \equiv \Omega';$$

et que par conséquent les deux périodes sont réelles, puisqu'elles satisfont à la congruence

$$x^q \equiv x \pmod{q};$$

mais si q est non-résidu de p, on a

$$\Omega^q \equiv \Omega', \quad \Omega'^q \equiv \Omega,$$

et les deux périodes sont imaginaires; car si Ω était réel, on aurait $\Omega^q \equiv \Omega$ et par suite $\Omega \equiv \Omega'$, tandis que la congruence du second degré ci-dessus ne peut avoir ses racines égales.

Or, d'autre part, les racines de cette congruence sont

$$\equiv \frac{-1 \pm \sqrt{\pm p}}{2} \pmod{q},$$

et sont par conséquent réelles ou imaginaires, selon que $\pm p$ est résidu ou non-résidu quadratique de q. On en conclut ce théorème (où l'on adopte, soit tous les signes supérieurs, soit tous les signes inférieurs) :

Si le nombre premier q est résidu quadratique du nombre premier $p = 4n \pm 1$, $\pm p$ est résidu quadratique de q; mais si q est non-résidu quadratique de p, $\pm p$ est lui-même non-résidu de q.

Enfin, en s'appuyant sur ce que -1 est résidu ou non-résidu quadratique de q, suivant que $q = 4n + 1$ ou $4n - 1$, on en conclut la loi de réciprocité :

Le nombre premier p est résidu ou non-résidu quadratique du nombre premier q, selon que q est lui-même résidu ou non-résidu de p, toutes les fois que l'un au moins de ces deux nombres est de la forme $4n + 1$; mais si tous les deux sont de la forme $4n + 3$, l'un étant résidu quadratique de l'autre, le second est non-résidu du premier.

Ces considérations peuvent également servir à déterminer le caractère quadratique du nombre 2. Nous avons vu tout à l'heure que, q désignant un nombre premier, si q est résidu quadratique de p, la congruence qui donne les deux périodes a ses racines réelles, mais que si q est non-résidu de p, cette congruence a ses racines imagi-

naires, et le raisonnement qui nous a servi est applicable au cas où q est égal à 2.

Supposons que p soit de la forme $8l \pm 1$, nous devons faire $n = 2l$, et la congruence qui donne les deux périodes prises suivant le module $q = 2$ devient

$$x^2 + x \mp 2l \equiv 0 \pmod{2}$$

ou

$$x^2 + x \equiv 0 \pmod{2},$$

elle a ses deux racines réelles qui sont 0 et 1 ; donc 2 est résidu quadratique de p.

Mais si p est de la forme $8l + 5$ ou $8l + 3$, nous devons faire $n = 2l + 1$, et la congruence se réduit à

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{2};$$

comme 0 et 1 ne sont pas racines de cette congruence, elle est irréductible, et ses deux racines doivent être regardées comme imaginaires; 2 est donc non-résidu quadratique de p.

5. Revenons à l'expression des deux périodes, lorsque p est de la forme $4n + 1$; il faut prendre sous le radical le signe $+$, et elles sont données par la formule

$$\frac{-1 \pm \sqrt{p}}{2} \pmod{q};$$

le nombre premier p est décomposable en la somme de deux carrés $a^2 + b^2$ et d'une seule manière, et, regardant a^2 comme le carré impair et b^2 comme le carré pair, nous pouvons écrire, au lieu de la formule précédente, la suivante

$$\frac{-1 \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

ou

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} \pmod{q},$$

et, suivant que ces deux expressions sont réelles ou imaginaires, q est

résidu quadratique ou non-résidu de p. Donc si on désigne par α le nombre entier moindre que q qui est représenté par

$$\frac{b}{a} \pmod{q},$$

q sera résidu quadratique de p ou non-résidu, selon que

$$\alpha^2 + 1$$

sera résidu quadratique de q ou en sera un non-résidu.

Ainsi le caractère de q par rapport à p ne dépend que de la valeur de $\frac{b}{a}$ (mod. q), ou plutôt de son carré, en sorte que si nous désignons par α ce nombre, et que p' soit un autre nombre premier de la forme $4n+1$ décomposable en la somme de deux carrés $a'^2 + b'^2$, q aura le même caractère par rapport à p' que par rapport à p, si on a

$$\frac{b'}{a'} \equiv \pm \alpha \pmod{q},$$

et il en sera encore de même si on a

$$\frac{b'}{a'} \equiv \pm \frac{1}{\alpha} \pmod{q};$$

car $\frac{1}{\alpha^2} + 1$ ou $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}$ a par rapport au module q le même caractère que $\alpha^2 + 1$.

Mais nous allons montrer, ce qui est extrêmement curieux, comment on peut embrasser tout d'un coup par une même formule les deux classes de l'expression

$$\frac{b}{a} \pmod{q},$$

la première renfermant ceux de ces nombres pour lesquels q est résidu quadratique de p, et la seconde ceux pour lesquels q est un non-résidu, et ces deux formules nous apprendront que chacune des deux classes renferme la même quantité de nombres au-dessous du module q.

Il faut considérer séparément les cas de $q = 4n+1$ et de $q = 4n+3$.

Supposons d'abord $q = 4n+1$; -1 étant résidu quadratique de q, on peut satisfaire à la congruence

$$\varphi^2 \equiv -1 \pmod{q},$$

dont nous retenons l'une des racines; désignons par A un résidu quadratique quelconque de q, et par B un non-résidu de q : je dis que toutes les valeurs de $\frac{b}{a} \pmod{q}$ pour lesquelles q est résidu quadratique de p, et qui forment la première classe, sont données par la formule

$$\alpha_1 \equiv \varphi \frac{1-A}{1+A} \pmod{q},$$

et que toutes les valeurs de $\frac{b}{a} \pmod{q}$ de la seconde classe sont données par

$$\alpha_2 \equiv \varphi \frac{1-B}{1+B} \pmod{q},$$

En effet, posons

$$\alpha = \varphi \frac{1-L}{1+L},$$

et nous aurons

$$1+\alpha^2 \equiv 1 - \frac{(1-L)^2}{(1+L)^2} \equiv \frac{4L}{(1+L)^2} \pmod{q},$$

et $1+\alpha^2$ sera résidu quadratique de q ou non-résidu, en même temps que L.

On voit aussi, d'après les formules précédentes, que les deux classes renferment la même quantité de nombres.

Supposons ensuite $q = 4n+3$; les formules précédentes ne sont plus admissibles, car φ serait imaginaire et par suite aussi les expressions de α_1 et α_2; mais on peut former celles qui sont applicables à ce cas par analogie et d'après une considération semblable à celle que M. Serret a employée (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 17 janvier 1859).

Posons $i = \sqrt{-1}$ et divisons les racines de la congruence

$$(a) \qquad z^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$$

en deux classes : celles qui satisfont à

$$z^{\frac{q+1}{2}} \equiv 1,$$

que nous désignerons en général par $\mathcal{A}$, et celles qui satisfont à

$$z^{\frac{q+1}{2}} \equiv -1,$$

que nous désignerons par $\mathcal{B}$. Toutes les valeurs de $\frac{b}{a}$ (mod. q) qui appartiennent à la première classe, sont données par la formule

$$\alpha_1 \equiv i\,\frac{1-\mathcal{A}}{1+\mathcal{A}} \quad (\text{mod. } q),$$

et toutes celles qui appartiennent à la seconde classe par

$$\alpha_2 \equiv i\,\frac{1-\mathcal{B}}{1+\mathcal{B}} \quad (\text{mod. } q).$$

D'abord il faut reconnaître que ces expressions sont réelles, quoiqu'elles renferment des quantités imaginaires. Or la condition pour qu'une quantité soit réelle suivant le module q est qu'elle satisfasse à la congruence

$$X^q \equiv X \quad (\text{mod. } q).$$

Élevons donc à la puissance q la quantité

$$\alpha \equiv i\,\frac{1-\mathfrak{L}}{1+\mathfrak{L}},$$

où $\mathfrak{L}$ représente une racine de (a), et on aura en effet

$$\alpha^q \equiv i^q\,\frac{1-\mathfrak{L}^q}{1+\mathfrak{L}^q} \equiv i^{4n+3}\,\frac{1-\frac{1}{\mathfrak{L}}}{1+\frac{1}{\mathfrak{L}}} \equiv i\,\frac{1-\mathfrak{L}}{1+\mathfrak{L}} \equiv \alpha,$$

ce qui prouve que les expressions précédentes sont réelles.

Formons ensuite la quantité $1 + \alpha^2$; elle est

$$1 + \alpha^2 \equiv \frac{4\mathcal{L}}{(1+\mathcal{L})^2}.$$

Si $\mathcal{L}$ est un nombre $\mathcal{A}$ il est le carré d'un des nombres complexes n qui satisfont à la congruence (a); donc on a

$$1 + \alpha^2 \equiv \left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^2,$$

et par la méthode qui précède, on reconnaît que $\frac{2n}{1+n^2}$ est réel; donc $1 + \alpha^2$ est un résidu quadratique. Au contraire, si $\mathcal{L}$ est un des nombres $\mathcal{B}$, il est évident que $1+\alpha^2$ est un non-résidu, et l'exactitude de nos formules est démontrée.

4. Revenons maintenant aux quatre périodes de la congruence

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, q),$$

dans laquelle on suppose que p est un nombre premier de la forme $4n + 1$. Les valeurs de ces périodes sont

$$\begin{aligned} \omega &\equiv x^{A'} + x^{A''} + x^{A'''} + \ldots, \\ \omega' &\equiv x^{B'} + x^{B''} + x^{B'''} + \ldots, \\ \omega'' &\equiv x^{C'} + x^{C''} + x^{C'''} + \ldots, \\ \omega''' &\equiv x^{D'} + x^{D''} + x^{D'''} + \ldots, \end{aligned}$$

$A', A'', A''', \ldots$ étant ce que nous avons appelé les nombres A; $B', B'', B''', \ldots$ les nombres B, etc. Si nous élevons ces quantités à la puissance q, comme nous ne considérons que leurs valeurs suivant le module q, il nous suffit d'élever chacun des termes à la puissance q, de sorte que nous obtenons

$$\omega^q \equiv \sum x^{Aq}, \quad \omega'^q \equiv \sum x^{Bq}, \quad \omega''^q \equiv \sum x^{Cq}, \quad \omega'''^q \equiv \sum x^{Dq}.$$

Or, supposons que q soit résidu biquadratique de p, les nombres de

chacune des quatre lignes

$$\begin{array}{l} A'q,\ A''q,\ A'''q,\ldots, \\ B'q,\ B''q,\ B'''q,\ldots, \\ C'q,\ C''q,\ C'''q,\ldots, \\ D'q,\ D''q,\ D'''q,\ldots, \end{array}$$

sont tous différents entre eux selon le module p, et les nombres de la première ligne sont congrus dans un certain ordre aux nombres A', A'', A''',..., ceux de la seconde aux nombres B', B'', B''',..., etc.; donc, puisque x^p est $\equiv 1$, on a

$$\sum x^{Aq} \equiv \sum x^{A}, \quad \sum x^{Bq} \equiv \sum x^{B}, \ldots \quad (\text{mod.}\, q),$$

et

$$\omega^q \equiv \omega, \quad \omega'^q \equiv \omega', \quad \omega''^q \equiv \omega'', \quad \omega'''^q \equiv \omega''',$$

c'est-à-dire que ω, ω', ω'', ω''' sont réels.

Quand un nombre q est donné, on sait comment on peut reconnaître s'il est résidu quadratique du nombre premier $p = 4n + 1$ ou s'il ne l'est pas, et par conséquent si q appartient aux groupes A et C ou aux groupes B et D, et il résulte de ce qui précède que, au cas où q est résidu quadratique de p, on pourra reconnaître si q appartient à A ou à C en examinant si les quatre périodes ω, ω', ω'', ω''' sont toutes les quatre réelles ou ne le sont pas.

Nous allons donc déterminer la congruence qui donne les quatre périodes de la congruence

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, q),$$

ou, ce qui revient au même, l'équation du quatrième degré qui a pour racines les quatre périodes de l'équation

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

et lorsque nous les aurons obtenues, il nous sera aisé de reconnaître si q est résidu biquadratique, résidu simplement quadratique ou non-résidu, et nous aurons fait un premier pas vers la solution de la recherche du caractère biquadratique de q. Plus tard, nous verrons comment on peut discerner si q appartient à B ou à D par rapport à p.

Formation des périodes de $\frac{p-1}{4}$ *racines de l'équation* $\frac{x^p-1}{x-1}=0$.

5. Désignons par g la plus petite racine primitive du nombre premier p de la forme $4m+1$; les quatre périodes de $\frac{p-1}{4}$ racines pour l'équation

$$\frac{x^p-1}{x-1}=0$$

sont, en désignant par x une racine quelconque,

$$\begin{aligned}
\omega &= x + x^{g^4} + x^{g^8} + \ldots + x^{g^{p-5}},\\
\omega' &= x^{g} + x^{g^5} + x^{g^9} + \ldots + x^{g^{p-4}},\\
\omega'' &= x^{g^2} + x^{g^6} + x^{g^{10}} + \ldots + x^{g^{p-3}},\\
\omega''' &= x^{g^3} + x^{g^7} + x^{g^{11}} + \ldots + x^{g^{p-2}}.
\end{aligned}$$

Supposons que l'équation qui donne ces quatre périodes soit

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

on aura

$$A = \omega + \omega' + \omega'' + \omega''', \quad B = \omega\omega' + \omega'\omega'' + \omega''\omega''' + \omega'''\omega + \omega\omega'' + \omega'\omega''',$$
$$C = \omega\omega'\omega'' + \omega'\omega''\omega''' + \omega\omega'\omega''' + \omega\omega''\omega''', \quad D = \omega\omega'\omega''\omega'''.$$

On obtient sur-le-champ, pour le premier coefficient, $A = -1$.

Désignons par (00) la quantité des nombres $1, g^4, g^8, \ldots, g^{p-5}$, ou plutôt la quantité des nombres A, leurs résidus minima qui, augmentés d'une unité, donnent des nombres A; puis désignons par (01), (02), (03) la quantité des nombres A qui, augmentés d'une unité, donnent des nombres B, C ou D. Pareillement, représentons par (10), (11), (12), (13) la quantité des nombres B qui, augmentés d'une unité, donnent des nombres A, B, C ou D. Enfin on voit clairement ce que l'on doit entendre par les seize quantités de la figure

$$S\left\{\begin{array}{llll}
(00), & (01), & (02), & (03),\\
(10), & (11), & (12), & (13),\\
(20), & (21), & (22), & (23),\\
(30), & (31), & (32), & (33),
\end{array}\right.$$

que nous appellerons la figure S.

Représentons, en général, x^l par $[l]$; alors nous aurons

$$\omega' = [g] + [g^5] + [g^9] + [g^{13}] + \ldots,$$
$$\omega = [1] + [g^4] + [g^8] + [g^{12}] + \ldots,$$

et en multipliant ces deux expressions nous obtenons

$$\begin{aligned}\omega\omega' = [g + 1] + [g^5 + 1] + [g^9 + 1] + \ldots \\ + [g^5 + g^4] + [g^9 + g^4] + [g^{13} + g^4] + \ldots \\ + [g^9 + g^8] + [g^{13} + g^8] + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les termes qui se trouvent dans une même ligne verticale forment une période, et l'on en déduit facilement

$$\omega\omega' = (10)\,\omega + (11)\,\omega' + (12)\,\omega'' + (13)\,\omega''';$$

on obtient ensuite (*Disquis. Arithm.*, n° 345), d'après cette formule,

$$\begin{aligned}\omega'\omega'' &= (10)\,\omega' + (11)\,\omega'' + (12)\,\omega''' + (13)\,\omega, \\ \omega''\omega''' &= (10)\,\omega'' + (11)\,\omega''' + (12)\,\omega + (13)\,\omega', \\ \omega'''\omega &= (10)\,\omega''' + (11)\,\omega + (12)\,\omega' + (13)\,\omega'',\end{aligned}$$

si on multiple ω'' par ω, on obtient aussi facilement

$$\begin{aligned}\omega\omega'' &= (20)\,\omega + (21)\,\omega' + (22)\,\omega'' + (23)\,\omega''' \quad \text{si} \quad p = 8n + 1, \\ &= (20)\,\omega + (21)\,\omega' + (22)\,\omega'' + (23)\,\omega''' + 2n + 1 \quad \text{si} \quad p = 8n + 5,\end{aligned}$$

et, d'après le n° 345 des *Disquisitiones*, on en tire

$$\begin{aligned}\omega'\omega''' &= (20)\,\omega' + (21)\,\omega'' + (22)\,\omega''' + (23)\,\omega \quad \text{si} \quad p = 8n + 1, \\ &= (20)\,\omega' + (21)\,\omega'' + (22)\,\omega''' + (23)\,\omega + 2n + 1 \quad \text{si} \quad p = 8n + 5;\end{aligned}$$

mais d'après le même principe appliqué à cette dernière formule nous avons

$$\begin{aligned}\omega''\omega &= (20)\,\omega'' + (21)\,\omega''' + (22)\,\omega + (23)\,\omega' \quad \text{si} \quad p = 8n + 1, \\ &= (20)\,\omega'' + (21)\,\omega''' + (22)\,\omega + (23)\,\omega' + 2n + 1 \quad \text{si} \quad p = 8n + 5.\end{aligned}$$

Comparant les deux valeurs de $\omega\omega''$, nous obtenons

$$(20) = (22), \quad (21) = (23).$$

En calculant $\omega\omega'''$ comme on a obtenu $\omega\omega''$, on trouve encore

$$\omega\omega''' = (30)\,\omega + (31)\,\omega' + (32)\,\omega'' + (33)\,\omega''',$$

et en comparant cette valeur avec celle que nous avons trouvée ci-dessus, on a

$$(11) = (30), \quad (12) = (31), \quad (13) = (32), \quad (10) = (33),$$

ce qui prouve que les deuxième et quatrième lignes de S sont composées de termes égaux.

Distinguons les deux cas de $p = 8n + 1$ et de $p = 8n + 5$.

6. Supposons d'abord que l'on ait

$$p = 8n + 1.$$

D'après la *Theoria residuorum biquadraticorum*, les termes de la figure S peuvent être ainsi écrits :

$$\begin{matrix} h, & i, & k, & l, \\ i, & l, & m, & m, \\ k, & m, & k, & m, \\ l, & m, & m, & i, \end{matrix}$$

et se réduisent à cinq quantités.

Posons

$$p = a^2 + b^2,$$

en regardant a comme impair et par suite b comme pair; puis choisissons le signe de a de manière que l'on ait $a \equiv 1 \pmod{4}$ et le signe de b de manière que l'on ait $b \equiv af \pmod{p}$, et f la valeur de $\sqrt{-1} \pmod{p}$ donnée par

$$f \equiv g^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

Alors les cinq quantités précédentes se déduisent des formules suivantes données par Gauss :

$$\begin{cases} 8h = 4n - 3a - 5, \\ 8i = 4n + a - 2b - 1, \\ 8k = 4n + a - 1, \\ 8l = 4n + a + 2b - 1, \\ 8m = 4n - a + 1. \end{cases}$$

Dans le cas actuel, les produits de deux périodes deviennent

$$\begin{aligned} \omega\omega' &= i\omega + l\omega' + m\omega'' + m\omega''', \\ \omega'\omega'' &= m\omega + i\omega' + l\omega'' + m\omega''', \\ \omega''\omega''' &= m\omega + m\omega' + i\omega'' + l\omega''', \\ \omega'''\omega &= l\omega + m\omega' + m\omega'' + i\omega''', \\ \omega\omega'' &= k\omega + m\omega' + k\omega'' + m\omega''', \\ \omega'\omega''' &= m\omega + k\omega' + m\omega'' + k\omega''', \end{aligned}$$

et on en conclut

$$\begin{aligned} \mathrm{B} = \sum \omega\omega' &= (i + k + l + 3m)(\omega + \omega' + \omega'' + \omega''') \\ &= -(i + k + l + 3m) = -3n. \end{aligned}$$

La somme des périodes étant égale à -1, en l'élevant au carré, on a

$$\sum \omega^2 + 2\sum \omega\omega' = 1,$$

puis

$$\sum \omega^2 = 6n + 1.$$

Formons le produit de $\omega\omega''$ par $\omega'\omega'''$ et nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{D} = \omega\omega'\omega''\omega''' = mk \sum \omega^2 &+ 2mk(\omega\omega'' + \omega'\omega''') \\ &+ (m^2 + k^2)(\omega\omega' + \omega\omega''' + \omega''\omega''' + \omega'\omega''); \end{aligned}$$

or on a

$$\omega\omega' + \omega\omega''' + \omega''\omega''' + \omega'\omega'' = -(i + l + 2m) = -2n,$$
$$\omega\omega'' + \omega'\omega''' = -(k + m) = -n,$$

on en conclut pour D

$$D = mk(6n + 1) - 2mkn - 2n(m^2 + k^2) = -2n^3 + mk(8n + 1)$$

ou

$$D = -2n^3 + mkp.$$

Cherchons maintenant le coefficient C. En multipliant $\omega'\omega''$ par ω, on obtient

$$\begin{aligned}\omega\omega'\omega'' &= m\omega^2 + i\omega\omega' + l\omega\omega'' + m\omega\omega''' \\ &= m(h\omega + i\omega' + k\omega'' + l\omega''' + 2n) + i(i\omega + l\omega' + m\omega'' + m\omega''') \\ &\quad + l(k\omega + m\omega' + k\omega'' + m\omega''') + m(l\omega + m\omega' + m\omega'' + i\omega''')\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\omega\omega'\omega'' = (hm + i^2 + kl + ml)\,\omega + (mi + il + ml + m^2)\,\omega' \\ + (mk + mi + kl + m^2)\,\omega'' + (2ml + 2mi)\,\omega''' + 2mn.\end{aligned}$$

Écrivons, pour abréger,

$$\omega\omega'\omega'' = M\omega + N\omega' + P\omega'' + Q\omega''' + 2mn,$$

nous aurons aussi

$$\begin{aligned}\omega'\omega''\omega''' &= M\omega' + N\omega'' + P\omega''' + Q\omega + 2mn, \\ \omega''\omega'''\omega &= M\omega'' + N\omega''' + P\omega + Q\omega' + 2mn, \\ \omega'''\omega\omega' &= M\omega''' + N\omega + P\omega' + Q\omega'' + 2mn,\end{aligned}$$

et en ajoutant ces quatre expressions, on a

$$C = -(M + N + P + Q) + 8mn.$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned}M + N + P + Q &= hm + i^2 + il + 2kl + 4ml + 4mi + 2m^2 + mk \\ &= m(h + k) + i(i + l) + 2kl + 4m(i + l) + 2m^2,\end{aligned}$$

et en s'appuyant sur les égalités $h + k = 2m - 1$, $i + l = 2k$

$$\begin{aligned} M + N + P + Q &= m(2m - 1) + 2k(i + l) + 8mk + 2m^2 \\ &= 4m^2 - m + 4k^2 + 8mk = 4(m + k)^2 - m \\ &= 4n^2 - m, \end{aligned}$$

et on en conclut enfin

$$C = -(4n^2 - m) + 8mn = -4n^2 + mp.$$

Donc l'équation qui donne les quatre périodes lorsque p est de la forme $8n + 1$ est

$$\text{(A)} \qquad x^4 + x^3 - 3nx^2 + (4n^2 - mp)x - 2n^3 + mkp = 0.$$

7. Supposons maintenant

$$p = 8n + 5.$$

Les termes de la figure S se réduisent encore à cinq, et peuvent s'écrire

$$\begin{matrix} h, & i, & k, & l, \\ m, & m, & l, & i, \\ h, & m, & h, & m, \\ m, & l, & i, & m. \end{matrix}$$

On pose

$$p = a^2 + b^2,$$

a étant impair et b pair, et on détermine les signes de a et b comme dans le premier cas. Alors on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} 8h &= 4n + a - 1, \\ 8i &= 4n + a + 2b + 3, \\ 8h &= 4n - 3a + 3, \\ 8l &= 4n + a - 2b + 3, \\ 8m &= 4n - a + 1. \end{aligned}$$

D'après le n° 5, on a pour les produits de deux périodes

$$\begin{aligned}
\omega\omega' &= m\omega + m\omega' + l\omega'' + i\omega''',\\
\omega'\omega'' &= i\omega + m\omega' + m\omega'' + l\omega''',\\
\omega''\omega''' &= l\omega + i\omega' + m\omega'' + m\omega''',\\
\omega'''\omega &= m\omega + l\omega' + i\omega'' + m\omega''',\\
\omega\omega'' &= h\omega + m\omega' + h\omega'' + m\omega''' + 2n + 1,\\
\omega'\omega''' &= m\omega + h\omega' + m\omega'' + h\omega''' + 2n + 1,
\end{aligned}$$

et on en conclut

$$B = -(i + l + h + 3m) + 4n + 2 = -(3n + 1) + 4n + 2 = n + 1.$$

Les carrés de ω, ω', ω'', ω''' sont

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= h\omega + i\omega' + k\omega'' + l\omega''',\\
\omega'^2 &= l\omega + h\omega' + i\omega'' + k\omega''',\\
\omega''^2 &= k\omega + l\omega' + h\omega'' + i\omega''',\\
\omega'''^2 &= i\omega + k\omega' + l\omega'' + h\omega''',
\end{aligned}$$

et leur somme est égale à $-(h + i + k + l) = -(2n + 1)$.

Faisons le produit de $\omega\omega''$ par $\omega'\omega'''$, et nous aurons

$$\begin{aligned}
D = \omega\omega'\omega''\omega''' = mh&(\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \omega'''^2)\\
&+ (m^2 + h^2)(\omega\omega' + \omega'\omega'' + \omega''\omega''' + \omega'''\omega)\\
&+ 2mh(\omega\omega'' + \omega'\omega''')\\
&+ (2n + 1)(h + m)(\omega + \omega' + \omega'' + \omega''') + (2n + 1)^2,
\end{aligned}$$

et comme on a

$$\begin{aligned}
\omega\omega' + \omega'\omega'' + \omega''\omega''' + \omega'''\omega &= -2n - 1,\\
\omega\omega'' + \omega'\omega''' &= 3n + 2,
\end{aligned}$$

il en résulte, en s'appuyant sur l'égalité $m+h=n$,

$$\begin{aligned}
D &= -mh(2n+1)-(m^2+h^2)(2n+1)\\
&\quad +2mh(3n+2)-(2n+1)(h+m)+(2n+1)^2\\
&= -(2n+1)(m+h)^2+(8n+5)mh-(2n+1)n+(2n+1)^2\\
&= (2n+1)(-n^2+n+1)+(8n+5)mh\\
&= pmh-(2n+1)(n^2-n-1).
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer le coefficient C. Pour cela, multiplions $\omega\omega'$ par ω'', et nous aurons

$$\begin{aligned}
\omega\omega'\omega'' &= m\omega\omega''+m\omega'\omega''+l\omega''^2+i\omega''\omega'''\\
&= m(h\omega+m\omega'+h\omega''+m\omega'''+2n+1)\\
&\quad +m(i\omega+m\omega'+m\omega''+l\omega''')+l(k\omega+l\omega'+h\omega''+i\omega''')\\
&\quad +i(l\omega+i\omega'+m\omega''+m\omega''')
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\omega\omega'\omega'' &= (mh+mi+lk+il)\,\omega+(2m^2+l^2+i^2)\,\omega'\\
&\quad +(mh+m^2+lh+im)\,\omega''\\
&\quad +(m^2+ml+il+mi)\,\omega'''+m(2n+1).
\end{aligned}$$

Au lieu de cette formule, écrivons, pour abréger,

$$\omega\omega'\omega'' = M\omega+N\omega'+P\omega''+Q\omega'''+(2n+1)m,$$

et nous en déduisons aisément

$$C=-(M+N+P+Q)+4m(2n+1).$$

On a ensuite

$$M+N+P+Q=2mh+2im+m(i+l)+(i+l)^2+4m^2+l(k+h),$$

et en se fondant sur les égalités $i+l=1+2h$, $k+h=2m$, on a

$$M+N+P+Q=4mh+2m(i+l)+m+4h^2+4m^2+4h+1,$$

et, en remplaçant $i+l$ par $1+2h$,

$$M+N+P+Q=[2(m+h)+1]^2-m=(2n+1)^2-m.$$

Donc on a

$$C = -(2n+1)^2 + m + 4m(2n+1)$$
$$= -(2n+1)^2 + m(8n+5) = -(2n+1)^2 + mp,$$

et l'équation qui donne les quatre périodes, lorsque p est de la forme $8n+5$, est

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^4 + x^3 + (n+1)x^2 + [(2n+1)^2 - mp]x \\ \qquad + pmh - (2n+1)(n^2 - n - 1) = 0. \end{array} \right.$$

8. Résolvons les équations (A) et (B); mais auparavant exprimons les coefficients au moyen des seuls nombres a et b.

Dans le cas où $p = 8n+1$, on a

$$n = \frac{a^2-1}{8} + \frac{b^2}{8}; \quad 8m = 4n - a + 1 = \frac{(a-1)^2 + b^2}{2},$$
$$8k = 4n + a - 1 = \frac{(a-1)(a+3) + b^2}{2},$$

et l'équation (A) par des transformations convenables devient

$$(4x - a + 1)^3 (4x + 3a + 1)$$
$$- \frac{3b^2}{8}\left(x - \frac{a-1}{4}\right)^2 - \frac{ab^2}{16}\left(x - \frac{a-1}{4}\right) + \frac{b^4}{256} = 0.$$

Posons

$$x - \frac{a-1}{4} = y,$$

et nous aurons l'équation plus simple

$$y^4 + ay^3 - \frac{3b^2}{8}y^2 - \frac{ab^2}{16}y + \frac{b^4}{256} = 0.$$

Faisons

$$\frac{b}{a} = \mu, \quad \frac{y}{a} = z,$$

et nous aurons l'équation

$$z^4 + z^3 - \frac{3}{8}\mu^2 z^2 - \frac{\mu^2}{16}z + \frac{\mu^4}{256} = 0;$$

en posant $\sqrt{1+\mu^2}=\varepsilon$, on en conclut facilement pour les quatre racines

$$z=\frac{-1\pm\varepsilon}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{2\varepsilon^2\mp 2\varepsilon},$$

expressions dans lesquelles il faut prendre en avant des deux ε des signes contraires, et on en conclut

$$x=\frac{-1\pm a\varepsilon}{4}\pm\frac{a}{4}\sqrt{2\varepsilon^2\mp 2\varepsilon},$$

pour les quatre périodes de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, lorsque p est de la forme $8n+1$. Si on s'occupe de la congruence

$$\frac{x^p-1}{x-1}\equiv 0 \pmod{q},$$

toutes les équations précédentes doivent être changées en des congruences suivant le module q, et on a pour l'expression des quatre périodes

$$x\equiv\frac{-1\pm a\varepsilon}{4}\pm\frac{a}{4}\sqrt{2\varepsilon^2\mp 2\varepsilon} \pmod{q}.$$

Si a est $\equiv 0$, la congruence qui donne y devient

$$y^4-\frac{3b^2}{8}y^2+\frac{b^4}{256}\equiv 0 \pmod{q},$$

et on en conclut

$$y\equiv\pm\frac{b}{4}(1\pm\sqrt{2}),\quad x\equiv\frac{-1}{4}\pm\frac{b}{4}(1\pm\sqrt{2}).$$

Dans le cas où $p=8n+5$, on a

$$p=a^2+b^2,\quad m=\frac{(a-1)(a+3)+b^2}{16},\quad h=\frac{a^2+2a-7+b^2}{16},$$
$$n=\frac{a^2-5}{8}+\frac{b^2}{8},$$

et l'équation (B) se change par la substitution de ces nombres en la

suivante

$$\left(x+\frac{a+1}{4}\right)^2\left[\left(x-\frac{a-1}{4}\right)^2+\frac{a^2}{4}\right]$$
$$+\frac{b^2}{8}\left(x+\frac{a+1}{4}\right)^2+\frac{ab^2}{16}\left(x+\frac{a+1}{4}\right)+\frac{a^2b^2}{32}+\frac{9b^4}{256}=0.$$

Posons

$$x+\frac{a+1}{4}=y,$$

et nous avons

$$y^4-ay^3+\frac{4a^2+b^2}{8}y^2+\frac{ab^2}{16}y+\frac{a^2b^2}{32}+9\frac{b^4}{256}=0.$$

Faisons

$$\frac{b}{a}=\mu,\quad \frac{y}{a}=z,$$

et nous aurons l'équation

$$z^4-z^3+\frac{4+\mu^2}{8}z^2+\frac{\mu^2}{16}z+\frac{1}{32}\left(\mu^2+\frac{9\mu^4}{8}\right)=0,$$

dont les racines sont, en posant encore $\sqrt{1+\mu^2}=\varepsilon$,

$$z=\frac{1\pm\varepsilon}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{2\varepsilon^2\pm2\varepsilon\sqrt{-1}},$$

et les quatre périodes sont renfermées dans l'expression

$$x=\frac{-1\mp a\varepsilon}{4}\pm\frac{a}{4}\sqrt{2\varepsilon^2\mp2\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

Toutes ces équations doivent être changées en congruences suivant le module q, si on s'occupe des périodes de la congruence

$$\frac{x^p-1}{x-1}\equiv 0 \pmod{q}.$$

Si a est $\equiv 0$, la congruence en y se réduit à

$$y^4+\frac{b^2}{8}y^2+\frac{9b^4}{256}\equiv 0,$$

ou à

$$y \equiv \pm \frac{b}{4}(1 \pm \sqrt{-2}),$$

et on obtient pour les périodes

$$x \equiv -\frac{1}{4} \pm \frac{b}{4}(1 \pm \sqrt{-2}) \pmod{q}.$$

Comment on peut reconnaître si le nombre premier q appartient à A *ou à* C *par rapport à p.*

9. Supposons d'abord p de la forme $8n+1$; les périodes de la congruence binôme ont pour valeurs

$$(1) \qquad \frac{-1 \pm a\varepsilon}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{2\varepsilon^2 \mp 2\varepsilon} \pmod{q},$$

et se réduisent dans le cas particulier de $a \equiv 0$ à

$$\frac{-1}{4} \pm \frac{b}{4}(1 \pm \sqrt{2}). \pmod{q}.$$

Donc, toutes les fois que a est $\equiv 0$, les périodes seront réelles si 2 est résidu quadratique de q, ou lorsque q est de la forme $8n \pm 1$, et les périodes sont imaginaires dans le cas contraire. Au reste ce cas peut être regardé comme renfermé dans le cas général en faisant $a \equiv 0$ et $a\varepsilon \equiv b$.

Disons maintenant dans quels cas l'expression (1) est réelle. Il faut d'abord que $\varepsilon \equiv \sqrt{1+\mu^2} \pmod{q}$ soit réel; ce qui aura lieu toutes les fois que q sera résidu quadratique de p (nº 5).

Cette condition étant supposée remplie, il faut de plus pour la réalité des périodes que les deux quantités

$$2\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon$$

soient des résidus quadratiques de q; ce qui a toujours lieu quand

l'une d'elles l'est, puisque leur produit

$$(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon)(2\varepsilon^2 - 2\varepsilon) \equiv 4\varepsilon^2\mu^2$$

est un résidu quadratique.

Alors rappelons-nous que la condition pour que q soit résidu biquadratique de p est que les quatre périodes soient réelles, et on en conclut le théorème suivant :

Si le nombre q est résidu quadratique de $p = 8n + 1 = a^2 + b^2$; posons $\frac{b}{a} \equiv \mu$, $1 + \mu^2$ sera un résidu quadratique $\equiv \varepsilon^2 (\text{mod. } q)$ et ε étant l'une des deux valeurs de $\sqrt{1 + \mu^2} (\text{mod. } q)$, la condition pour que q soit résidu biquadratique de p est que $2\varepsilon^2 + 2\varepsilon$ soit résidu quadratique de q. En particulier q est résidu biquadratique de p toutes les fois que b est $\equiv 0$, et toutes les fois que a étant $\equiv 0$, q est de la forme $8n \pm 1$.

Supposons ensuite p de la forme $8n + 5$. Les périodes de la congruence binôme ont pour valeurs

$$\frac{-1 \pm a\varepsilon}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{2\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\sqrt{-1}} \quad (\text{mod. } q).$$

Si q est de la forme $4n + 1$, -1 est résidu quadratique de q, donc $\sqrt{-1}$ (mod. q) est réel. Pour que les périodes soient réelles, il faut que $1 + \mu^2$ soit un résidu quadratique $\equiv \varepsilon^2$ et que la quantité $2\varepsilon^2 + 2\varepsilon$ soit aussi résidu quadratique de q. Alors q sera résidu biquadratique de p.

Si q est de la forme $4n + 3$, considérons le caractère biquadratique de $-q$. Comme -1 est non résidu quadratique de q, $\sqrt{-1}$ est imaginaire; q et par suite $-q$ étant supposés résidus quadratiques de p, $1 + \mu^2$ est un résidu de q, $\equiv \varepsilon^2$ (mod. q). Pour que q soit résidu biquadratique de p, il faudra que les périodes soient réelles ou que $-(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon)$ soit un résidu quadratique, ou encore que $2\varepsilon^2 + 2\varepsilon$ soit un non résidu de q. Donc comme -1 appartient à C par rapport à p, $-q$ appartient à A ou à C par rapport à p suivant que $2\varepsilon^2 + 2\varepsilon$ est résidu quadratique ou non résidu par rapport à q.

Donc en observant que $+q$ et $-q$ appartiennent tous deux à A ou

tous deux à C, lorsque p est de la forme $8n+1$, on en conclut le théorème suivant : Si on prend dans $\pm q$ le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que $q = 4n+1$ ou $4n-1$; $\pm q$ est résidu quadratique du nombre premier $p = a^2 + b^2$, lorsque, en désignant par μ la quantité $\frac{b}{a}$ (mod. q), $1 + \mu^2$ est un résidu quadratique de q, $\equiv \varepsilon^2$ (mod. q), et $\pm q$ sera résidu biquadratique ou simplement quadratique par rapport à p, suivant que $2\varepsilon^2 + 2\varepsilon$ est résidu ou non-résidu quadratique de q.

A cela on peut ajouter que si a est $\equiv 0$ (mod. q), $\pm q$ est résidu biquadratique de p ou simplement résidu selon que q est de la forme $8n \pm 1$ ou $8n \pm 3$. C'est ce que nous avons vérifié quand p est de la forme $8n+1$, et ce qui est aussi aisé à reconnaître pour $p = 8n + 5$.

Formules qui donnent les classes du rapport $\frac{b}{a}$ (mod. q).

10. Nous venons de voir comment les valeurs de $\frac{b}{a}$ (mod. q) peuvent servir à distinguer si un nombre premier q appartient à A ou à C ou aux groupes B et D suivant le module p. Mais on peut aller plus loin; car on peut exprimer par une même formule les classes du rapport $\frac{b}{a}$ (mod. q), pour lesquelles q est résidu biquadratique, simplement résidu, ou non-résidu de p.

Nous avons déjà montré (n° **5**) comment on peut distinguer les deux classes qui se rapportent aux groupes A et C des deux classes qui se rapportent aux groupes B et D; il nous faut maintenant séparer les deux premières.

Supposons d'abord $p = 4n+1$; ces deux classes sont données par la formule

$$\frac{b}{a} \equiv \mu \equiv \varphi \frac{1-L}{1+L} \pmod{q},$$

où l'on prend pour L un résidu quadratique $\equiv l^2$, et pour φ une valeur de $\sqrt{-1}$ (mod. q). On a

$$1 + \mu^2 \equiv 1 - \frac{(1-l^2)^2}{(1+l^2)^2} \equiv \frac{4l^2}{(1+l^2)^2}.$$

Posons

$$\frac{2l}{1+l^2} \equiv \varepsilon,$$

et nous aurons

$$2(\varepsilon^2+\varepsilon) \equiv 4l\frac{(1+l)^2}{(1+l^2)^2} \pmod{q};$$

et cette expression sera résidu quadratique ou non en même temps que l.

Il résulte donc de ce que nous avons prouvé dans le numéro précédent, que q appartient au groupe A ou C, selon que L est résidu biquadratique de q ou simplement résidu.

Désignons par G la plus petite racine primitive de q, adoptons pour φ

$$\varphi \equiv G^{\frac{p-1}{4}},$$

et désignons par α, β, γ, δ les valeurs de $\frac{b}{a} \pmod{q}$ pour lesquelles q appartient aux groupes A, B, C, D; nous aurons

$$\alpha \equiv \varphi\frac{1-G^{4e}}{1+G^{4e}}, \quad \gamma \equiv \varphi\frac{1-G^{4e+2}}{1+G^{4e+2}},$$

formules où il suffira de donner à e les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{q-5}{4}$, de sorte que l'on aura $\frac{q-1}{4}$ nombres α, $\frac{q-1}{4}$ nombres γ, et il restera $\frac{q-1}{2}$ nombres pour les classes β et δ.

Passons au cas où q est de la forme $4n+3$; les deux classes α et γ sont données par la formule

$$\mu \equiv i\frac{1-H}{1+H},$$

dans laquelle i représente $\sqrt{-1}$, et H une des racines de la congruence

$$(a) \qquad z^{\frac{q+1}{2}} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Désignons par j une racine primitive de la congruence binôme

$$(b) \qquad z^{q+1} \equiv 1 \pmod{q};$$

toutes les racines sont congrues aux nombres

$$1,\ j,\ j^2, \ldots,\ j^q;$$

disposons-les sur quatre lignes

$$\begin{array}{llll} 1, & j^4, & j^8, \ldots, & j^{q-3}, \\ j, & j^5, & j^9, \ldots, & \\ j^2, & j^6, & j^{10}, \ldots, & \\ j^3, & j^7, & j^{11}, \ldots, & \end{array}$$

Toutes ces quantités sont des nombres complexes de la forme $A + Bi$, car elles appartiennent à la congruence

$$z^{q^2-1} \equiv 1 \pmod{q},$$

dont les racines imaginaires satisfont à des congruences irréductibles du second degré, et, q étant de la forme $4n + 3$, elles sont de la forme $A + Bi$. Nous distinguerons tous ces nombres complexes en disant qu'ils appartiennent aux groupes A, B, C ou D, suivant qu'ils seront dans la première ligne, dans la deuxième, la troisième ou la quatrième.

Les nombres complexes des groupes A ou C sont les racines de la congruence (a), et nous pouvons dans l'expression de μ remplacer H par l^2 et nous en conclurons

$$1 + \mu^2 \equiv \frac{4l^2}{(1 + l^2)^2} \equiv \left(\frac{2l}{1 + l^2}\right)^2;$$

posons

$$\frac{2l}{1 + l^2} \equiv \varepsilon,$$

ε sera réel; comme nous l'avons vu (n° 5).

Nous avons ensuite

$$2(\varepsilon^2 + \varepsilon) \equiv 4l \frac{(1+l)^2}{(1+l^2)^2} \pmod{q}.$$

Si l appartient à A ou à C, le second membre est le carré du nombre complexe

$$2l \frac{1+l}{1+l^2},$$

et en l'élevant à la puissance p, on le reconnaît réel; donc $2(\varepsilon^2+\varepsilon)$ est un résidu quadratique. Mais si l appartient à B ou à D, le second membre n'est pas congru au carré d'un nombre complexe qui renferme le nombre réel comme cas particulier; donc $2(\varepsilon^2+\varepsilon)$ est un non-résidu quadratique.

De ce qui précède et de la fin du n° **9**, nous concluons que les classes α et γ de la quantité $\frac{b}{a} \pmod{q}$ sont données par les formules

$$\alpha \equiv i \frac{1-j^{4e}}{1+j^{4e}}, \quad \gamma \equiv i \frac{1-j^{4e+2}}{1+j^{4e+2}},$$

dans lesquelles il suffit de donner à e les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{q-3}{4}$.

Formules qui donnent trois nombres consécutifs qui ont le même caractère quadratique par rapport à un nombre premier q.

11. D'après ce que nous avons vu précédemment, il est facile de déterminer un nombre qui soit précédé et suivi de deux nombres ayant un même caractère quadratique identique ou différent à celui du nombre intermédiaire. Afin d'éviter les longueurs inutiles, donnons seulement les formules qui déterminent trois nombres consécutifs qui ont le même caractère quadratique.

Nous avons déterminé les nombres ε qui jouissent de la propriété que les deux expressions $2\varepsilon(\varepsilon \pm 1)$ soient des résidus quadratiques, et alors 2ε, $\varepsilon+1$, $\varepsilon-1$ ont tous trois le même caractère quadratique.

Supposons q de la forme $8n+1$ ou de la forme $8n+7$, 2 est

résidu quadratique de q, et $\varepsilon - 1$, ε, $\varepsilon + 1$ sont trois nombres qui ont le même caractère quadratique. Si q est de la forme $8n + 1$, cette forme étant comprise dans $4n + 1$, on a, d'après la formule du n° **10**, pour le nombre du milieu,

$$(a) \qquad \varepsilon \equiv \pm \frac{2G^{2e}}{1 + G^{4e}} \pmod{q}.$$

Si q est de la forme $8n + 7$, qui est renfermée dans $4n + 3$, on a

$$(b) \qquad \varepsilon \equiv \pm \frac{2j^{2e}}{1 + j^{4e}}.$$

Nous avons aussi déterminé des nombres ε qui jouissent de la propriété que $2\varepsilon(\varepsilon \pm 1)$ représentent deux non-résidus. Alors 2ε a un caractère quadratique contraire à celui de $\varepsilon + 1$ et de $\varepsilon - 1$; donc si 2 est un non-résidu, ce qui a lieu pour $q = 8n + 3$ et $8n + 5$, les trois nombres $\varepsilon - 1$, ε, $\varepsilon + 1$ ont le même caractère quadratique. Si $q = 8n + 5$, le nombre intermédiaire est donné par la formule

$$(c) \qquad \varepsilon \equiv \pm \frac{2G^{2e+1}}{1 + G^{4e+2}},$$

et si $q = 8n + 3$, par

$$(d) \qquad \varepsilon \equiv \pm \frac{2j^{2e+1}}{1 + j^{4e+2}}.$$

Proposons-nous de déterminer combien il y a de résidus quadratiques suivis et précédés d'un résidu quadratique. Si q est de la forme $4n + 3$, on doit remarquer que de deux nombres qui ne diffèrent que par le signe, l'un seulement est résidu de q; donc on doit prendre les formules (b) et (d) avec e quelconque, mais en choisissant l'un des deux signes; donc le nombre cherché est $\frac{q+1}{8}$.

Si q est de la forme $4n + 1$, les nombres considérés sont donnés par les formules (a) et (c), mais avec la condition que $G^{4e} + 1$ ou $G^{4e+2} + 1$ soient des résidus quadratiques. Posons

$$q = A^2 + B^2,$$

A^2 étant le carré impair, B^2 le carré pair et le signe de A choisi de manière que $A \equiv 1 \pmod{4}$; si nous adoptons les notations du n° 6, on voit que si $q = 8n + 1$, le nombre cherché est égal à

$$(00) + (02) = \frac{q-1}{8} - \frac{A+3}{4},$$

et que si $q = 8n + 5$, il a pour valeur

$$(20) + (22) = \frac{q-5}{8} + \frac{A+3}{4}.$$

Distinction des groupes A, B, C, D.

12. On reconnaît par induction que si p est un nombre premier $4n+1$ égal à $a^2 + b^2$ (a et b étant choisis comme il a été dit n° 6), le caractère biquadratique du nombre premier $\pm q$ par rapport au nombre p dépend uniquement de la valeur du rapport $\frac{b}{a}$ prise suivant le module q. Et déjà nous savons comment on peut reconnaître si le rapport $\frac{b}{a}$ caractérise un résidu biquadratique, un résidu simplement quadratique ou un non-résidu, et par conséquent si $\pm q$ appartient aux groupes A, C ou au deux groupes B et D réunis ensemble.

Mais jusqu'à présent nous n'avons rien dit qui permît de distinguer les deux groupes B et D. La détermination des valeurs des quatre périodes de la congruence $\frac{x^p - 1}{x-1} \equiv 0 \pmod{q}$ nous avait suffi pour résoudre la première partie de la question, et nous allons montrer que la seconde se résoudra facilement dès que l'on sera parvenu à déterminer l'ordre des quatre périodes.

Ces quatre périodes sont

$$\begin{aligned}
\omega &\equiv x + x^{a'} + x^{a''} + x^{a'''} + \ldots,\\
\omega' &\equiv x^{b'} + x^{b''} + x^{b'''} + \ldots,\\
\omega'' &\equiv x^{c'} + x^{c''} + x^{c'''} + \ldots,\\
\omega''' &\equiv x^{d'} + x^{d''} + \ldots,
\end{aligned}$$

1, a', a'',... étant les nombres A selon le module p; b', b'', b''',... les nombres B; c', c'',... les nombres C; d', d'',... les nombres D.

Ces périodes ne sont pas complétement déterminées, car nous n'avons pas assigné une valeur à la racine x qui peut être l'une quelconque; mais si, ayant pris pour x une racine, on en prend ensuite une autre, il est aisé de voir que l'ordre circulaire ne sera pas changé. Ainsi divisons un cercle en quatre parties égales, puis, tournant dans un sens déterminé, plaçons-y les périodes ω, ω', ω'', ω''' successivement aux points de division que l'on rencontre; quelle que soit la racine x, l'ordre des périodes sur ce cercle restera le même.

Si q est résidu biquadratique de p, comme nous l'avons déjà observé, en élevant les périodes à la puissance q, elles ne changent pas et par conséquent elles sont réelles. Supposons maintenant que q appartienne aux groupes C, B ou D par rapport à p.

Si q appartient à C, on a

$$\omega^q \equiv x^q + x^{a'q} + x^{a''q} + \ldots \equiv \omega'',$$
$$\omega'^q \equiv x^{b'q} + x^{b''q} + \ldots \equiv \omega''', \quad \omega''^q \equiv \omega, \quad \omega'''^q \equiv \omega'.$$

Si q appartient à B, on a

$$\omega^q \equiv \omega', \quad \omega'^q \equiv \omega'', \quad \omega''^q \equiv \omega''', \quad \omega'''^q \equiv \omega.$$

Enfin, si q appartient à D, on obtient

$$\omega^q \equiv \omega''', \quad \omega'^q \equiv \omega, \quad \omega''^q \equiv \omega', \quad \omega'''^q \equiv \omega''.$$

Il résulte de là que, pour la recherche qui nous occupe, il suffit d'examiner dans quel ordre se suivent sur le cercle les valeurs des quatre périodes, et c'est la question qui va nous occuper.

Introduction d'un angle v dans l'expression des quatre périodes de l'équation $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$.

13. Reprenons les valeurs des quatre périodes; mais, au lieu de supposer qu'il s'agisse des racines de la congruence binôme, commençons

par nous occuper des périodes relatives aux racines de l'équation

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0.$$

D'abord si p est de la forme $8n + 1$, nous savons que les périodes ont pour valeurs

$$\frac{-1 \pm a\varepsilon}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{2\varepsilon^2 \mp 2\varepsilon}.$$

Posons

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang} v,$$

b et a étant déterminés comme nous avons vu, $\frac{b}{a}$ est un nombre positif ou négatif, et il nous suffira de faire varier v entre zéro et π, c'est-à-dire entre zéro et $\frac{\pi}{2}$ ou entre $\frac{\pi}{2}$ et π, suivant que $\frac{b}{a}$ sera positif ou négatif.

On aura

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 v} = \pm \frac{1}{\cos v}.$$

Prenons par exemple

$$\varepsilon = -\frac{1}{\cos v},$$

et il en résultera

$$2\varepsilon^2 - 2\varepsilon = 2\,\frac{1 + \cos v}{\cos^2 v} = \frac{4\cos^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 v},$$

$$\sqrt{2\varepsilon^2 - 2\varepsilon} = \pm \frac{2\cos \frac{v}{2}}{\cos v};$$

de même on a

$$\sqrt{2\varepsilon^2 + 2\varepsilon} = \pm \frac{2\sin \frac{v}{2}}{\cos v};$$

et on en conclut que les périodes ont les valeurs suivantes :

$$\frac{-1}{4}-\frac{a\left(1+2\cos\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon},\quad \frac{-1}{4}-\frac{a\left(1-2\cos\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon},$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{a\left(1-2\sin\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon},\quad -\frac{1}{4}+\frac{a\left(1+2\sin\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon}.$$

On sait que les quatre périodes sont toutes exprimables par l'une d'entre elles. Pour obtenir ω' au moyen de ω, employons les formules du n° **6**

$$\omega+\omega'+\omega''+\omega'''=-1,$$

$$\omega\omega'=i\omega+l\omega'+m(\omega''+\omega'''),$$

et l'on en tire

$$\omega'=\frac{(i-m)\,\omega-m}{\omega-l+m}$$

ou

$$\omega'=\frac{4(a-b-1)\,\omega-a^2-b^2+2a-1}{16\omega-4(a+b-1)}.$$

Puisque nous pouvons prendre pour ω la période que nous voulons, posons

$$\omega=-\frac{1}{4}-\frac{a\left(1+2\cos\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon},$$

et déduisons-en l'expression de ω' en fonction de υ. Désignons par N et D le numérateur et le dénominateur, nous aurons

$$D=4(4\omega-a-b+1)=-\frac{4a}{\cos\upsilon}\left(\sin\upsilon+2\cos^2\frac{\upsilon}{2}+2\cos\frac{\upsilon}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}N&=(a-a\operatorname{tang}\upsilon-1)\left(-1-a\frac{1+2\cos\frac{\upsilon}{2}}{\cos\upsilon}\right)-\frac{a^2}{\cos^2\upsilon}+2a-1\\&=-\frac{a^2}{\cos\upsilon}\Big[\sin\upsilon+2\cos^2\frac{\upsilon}{2}+2\cos\frac{\upsilon}{2}\\&\qquad-\operatorname{tang}\upsilon\left(-\sin\upsilon+2\cos^2\frac{\upsilon}{2}+2\cos\frac{\upsilon}{2}\right)\Big]\\&\quad+\frac{a}{\cos\upsilon}\left(\sin\upsilon+2\cos^2\frac{\upsilon}{2}+2\cos\frac{\upsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

On en tire

$$\omega' = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} = \frac{a-1}{4} - \frac{a}{4}\operatorname{tang} \upsilon \frac{-\sin\upsilon + 2\cos^2\frac{\upsilon}{2} + 2\cos\frac{\upsilon}{2}}{\sin\upsilon + 2\cos^2\frac{\upsilon}{2} + 2\cos\frac{\upsilon}{2}}.$$

Or, on a

$$-\frac{\operatorname{tang}\upsilon}{4}\frac{-\sin\upsilon + 2\cos^2\frac{\upsilon}{2} + 2\cos\frac{\upsilon}{2}}{\sin\upsilon + 2\cos^2\frac{\upsilon}{2} + 2\cos\frac{\upsilon}{2}} = \frac{\sin\upsilon}{4\cos\upsilon}\frac{\sin\frac{\upsilon}{2} - \cos\frac{\upsilon}{2} - 1}{\sin\frac{\upsilon}{2} + \cos\frac{\upsilon}{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{2\cos\upsilon}\left(\sin^2\frac{\upsilon}{2} - \sin\frac{\upsilon}{2}\right);$$

et il en résulte enfin

$$\omega' = -\frac{1}{4} + \frac{a\left(1 - 2\sin\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon}.$$

ω' se déduit donc de ω par le changement de υ en $\upsilon + \pi$; ω'' doit évidemment se déduire par le même changement de ω' et ω''' de ω'', et on a par conséquent

$$\omega = -\frac{1}{4} - \frac{a\left(1 + 2\cos\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon}, \quad \omega'' = -\frac{1}{4} - \frac{a\left(1 + 2\cos\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon},$$

$$\omega' = -\frac{1}{4} + \frac{a\left(1 + 2\sin\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon}, \quad \omega''' = -\frac{1}{4} + \frac{a\left(1 + 2\sin\frac{\upsilon}{2}\right)}{4\cos\upsilon},$$

et ces quatre formules sont renfermées dans la suivante

$$\omega^{(k)} = -\frac{1}{4} - \frac{a\left(1 + 2\cos\frac{\upsilon + k\pi}{2}\right)}{4\cos(\upsilon + k\pi)}.$$

14. Passons au cas où p est de la forme $8n + 5$. Les quatre périodes ont pour valeurs

$$\frac{-1 \pm a\varepsilon}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{2\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

Faisons encore $\frac{b}{a} = \tang v$, et les quatre périodes ont pour valeurs

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned}
\omega &= -\frac{1}{4} + \frac{a}{4\cos v}\left(1 + 2\sqrt{-1}\cos\frac{v}{2}\right),\\
\omega' &= -\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos v}\left(1 - 2\sqrt{-1}\sin\frac{v}{2}\right),\\
\omega'' &= -\frac{1}{4} + \frac{a}{4\cos v}\left(1 - 2\sqrt{-1}\cos\frac{v}{2}\right),\\
\omega''' &= -\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos v}\left(1 + 2\sqrt{-1}\sin\frac{v}{2}\right);
\end{aligned}\right.$$

mais il faut prouver que ces formules donnent aussi leur ordre. On pourrait employer un calcul analogue à celui qui nous a servi dans le cas de $p = 8n + 1$. Mais ce calcul étant assez long, on peut l'éviter par la remarque suivante.

Que p soit égal à $8n + 1$ ou à $8n + 5$, les expressions des périodes restent dans le même ordre pour toutes les valeurs de p de l'une de ces deux formes; de sorte que, si on le détermine pour une valeur particulière $p = 5$, cette recherche sera faite en même temps pour toutes les valeurs de p de la forme $8n + 5$.

Calculons donc directement les périodes pour $p = 5$.

Les nombres des groupes A, B, C, D par rapport à 5 se réduisent à un seul; 2 est la plus petite racine primitive de 5, et on a

$$A = 1,\quad B = 2,\quad C = 4,\quad D = 3.$$

Soit x une racine quelconque de $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = 0$, les périodes se réduisent à un seul terme, et ont pour valeurs

$$\omega = x,\quad \omega' = x^2,\quad \omega'' = x^4,\quad \omega''' = x^3,$$

et si nous prenons pour x

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5},$$

nous aurons

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{-1},$$

$$\omega' = \cos\frac{4\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{-1},$$

$$\omega'' = \cos\frac{8\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{-1},$$

$$\omega''' = \cos\frac{6\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{-1}.$$

Employons ensuite les formules (B), et nous avons $p = 1 + 4$ et $a \equiv 1 \pmod{4} = 1$, $b \equiv 2 \pmod{5} = 2$; donc $\tang v = 2$, et, en supposant que v varie de zéro à π, nous avons pour $\sin v$ et $\cos v$ les valeurs

$$\sin v = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos v = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La partie réelle de la première expression (B) est donc

$$-\frac{1}{4} + \frac{a}{4\cos v} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

et le coefficient de $\sqrt{-1}$ est

$$\frac{a}{2\cos v}\cos\frac{v}{2} = \frac{a}{2\cos v}\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}} = +\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

La partie réelle de la seconde expression (B) est

$$-\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos v} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

et le coefficient de $\sqrt{-1}$ est

$$\frac{a\sin\frac{v}{2}}{2\cos v} = \frac{a}{2\cos v}\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

on reconnaît par conséquent l'exactitude des formules (B), que l'on peut réduire à la suivante

$$\omega^{(k)} = -\frac{1}{4} + \frac{a}{4\cos(\nu + k\pi)}\left(1 + 2\sqrt{-1}\cos\frac{\nu + k\pi}{2}\right).$$

Sur les racines de la congruence $x^{q-1} \equiv 1$ *ou* $x^{q+1} \equiv 1$ (mod. q), *suivant que* q *est de la forme* $4n+1$ *ou* $4n-1$.

15. La division de la circonférence en n parties égales dépend de la résolution de l'équation

$$x^n = 1,$$

dont les racines sont renfermées dans la formule

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

k étant susceptible des valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

La théorie de la division du cercle permet de calculer les sinus, cosinus et tangentes d'un arc sous-multiple de la circonférence entière sous la forme algébrique, c'est-à-dire sous la forme d'expressions qui ne sont irrationnelles que par les radicaux. Il suit évidemment de là que les lignes trigonométriques des multiples de cet arc sont elles-mêmes exprimables sous la forme algébrique; prenons ces expressions suivant le module q, et représentons-les par les formules

$$\sin\frac{2k\pi}{n} \pmod{q}, \quad \cos\frac{2k\pi}{n} \pmod{q}, \quad \text{tang}\frac{2k\pi}{n} \pmod{q}.$$

Or, si cherchant à déterminer suivant le module q tous les radicaux dans l'ordre où ils se présentent dans le calcul de ces quantités, on peut successivement les remplacer par des nombres entiers qui leur sont congrus, de sorte que l'on obtienne en définitive pour l'expression complète un nombre entier, nous devrons regarder cette expression comme réelle; mais dans le cas contraire elle doit être considérée comme imaginaire.

D'après cela, étudions les valeurs des expressions des lignes trigono-

métriques de l'arc $\frac{2\pi}{2(q-1)}$ prises suivant le module premier $q = 4n+1$; nous sommes conduit à considérer la congruence

(1) $$x^{2(q-1)} \equiv 1 \pmod{q},$$

et, d'après les réflexions qui précèdent, on peut représenter les racines par

(2) $$\cos\frac{k\pi}{q-1} + \sqrt{-1}\sin\frac{k\pi}{q-1} \pmod{q},$$

k ayant les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2q-3$, et $\sqrt{-1}$, à cause de la forme du module, est une quantité réelle que nous désignerons par φ.

La congruence peut se décomposer en les deux suivantes

(3) $$x^{q-1} \equiv 1,$$

(4) $$x^{q-1} \equiv -1.$$

La congruence (3) a toutes ses racines réelles qui sont $1, 2, \ldots, q-1$, et on peut aussi les représenter par l'expression

$$u \equiv \cos\frac{2k\pi}{q-1} + \varphi\sin\frac{2k\pi}{q-1} \pmod{q}.$$

Les deux parties qui composent u sont elles-mêmes réelles; car deux des racines sont données par

$$\cos\frac{2k\pi}{q-1} \pm \varphi\sin\frac{2k\pi}{q-1},$$

et, puisqu'elles sont toutes deux réelles, il s'ensuit que

$$\sin\frac{2k\pi}{q-1}, \quad \cos\frac{2k\pi}{q-1}, \quad \operatorname{tang}\frac{2k\pi}{q-1}$$

sont réels. Nous pouvons ensuite observer que

$$1 + \operatorname{tang}^2\frac{2k\pi}{q-1}$$

est un résidu quadratique, car cette expression est équivalente à

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{2k\pi}{q-1}} \quad (\text{mod. } q),$$

qui est un résidu quadratique, puisque $\cos\frac{2k\pi}{q-1}$ est un entier réel. Posons

$$\frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{q-1}} \equiv \varepsilon,$$

et nous aurons pour l'expression de $2(\varepsilon^2 \pm \varepsilon)$

$$\frac{4\cos^2\frac{k\pi}{q-1}}{\cos^2\frac{2k\pi}{q-1}}, \quad \frac{4\sin^2\frac{k\pi}{q-1}}{\cos^2\frac{2k\pi}{q-1}},$$

qui sont des résidus quadratiques dans le cas où k est pair; mais ces expressions sont au contraire des non-résidus si k est impair, parce que $\sin\frac{k\pi}{q-1}$ et $\cos\frac{k\pi}{q-1}$ sont imaginaires, comme on le reconnait par l'expression générale des racines de la congruence (4) qui est

$$v \equiv \cos\frac{(2l+1)\pi}{q-1} + \varphi \sin\frac{(2l+1)\pi}{q-1} \quad (\text{mod. } q);$$

car il est clair que toutes ces racines sont imaginaires, puisque la congruence (4) n'a pas de racine commune avec la congruence (3).

Démontrons maintenant que les tangentes de tous les arcs $0, \frac{\pi}{q-1}, 2\frac{\pi}{q-1}, 3\frac{\pi}{q-1}, \ldots, (q-2)\frac{\pi}{q-1}$, sont incongrues suivant le mod. q. Soit m une racine quelconque de (1); en désignant par α un des arcs précédents, on a

$$\cos\alpha + \varphi\sin\alpha \equiv m,$$

et ensuite

$$\cos\alpha - \varphi\sin\alpha \equiv \frac{1}{m};$$

donc

$$\tang\alpha \equiv \varphi \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Il est aisé d'en conclure que toutes ces tangentes sont incongrues et peuvent représenter tous les nombres $0, 1, 2, \ldots, q-1$, excepté $+\varphi$ et $-\varphi$.

Si α est de la forme $\frac{2k\pi}{q-1}$, m est réel et m^2 résidu quadratique; si α a au contraire la valeur $\frac{(2k+1)\pi}{q-1}$, m est racine de (4) et m^2 est un nombre réel, mais non-résidu.

16. Étudions ensuite les valeurs des lignes trigonométriques de l'arc $\frac{2\pi}{2(q+1)}$ prises suivant le module premier $q = 4n + 3$. Nous considérerons la congruence

$$(1) \qquad x^{2(q+1)} \equiv 1 \pmod{q},$$

dont les racines peuvent être représentées par

$$\cos\frac{k\pi}{q+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{k\pi}{q+1} \pmod{q};$$

mais ici $\sqrt{-1}$ est imaginaire, et nous le remplacerons par la lettre i.

Décomposons la congruence (1) en les suivantes :

$$(3) \qquad x^{q+1} - 1 \equiv 0,$$

$$(4) \qquad x^{q+1} + 1 \equiv 0.$$

La congruence (3) a toutes ses racines imaginaires, excepté 1 et -1. Ses racines sont données par

$$u \equiv \cos\frac{2k\pi}{q+1} + i\sin\frac{2k\pi}{q+1} \pmod{q};$$

celles de (4) sont

$$v \equiv \cos\frac{(2l+1)\pi}{q+1} + i\sin\frac{(2l+1)\pi}{q+1}.$$

Remarquons que si on élève les racines v au carré, on obtiendra la moitié des racines u, celles pour lesquelles k est impair.

Soit $u = m + ni$ une racine de (3) autre que 1 et -1, elle satisfait à une congruence irréductible du second degré

$$x^2 + 2ax + b \equiv 0 \pmod{q};$$

or u étant racine, u^q, qui est congru à $m - ni$, est la seconde, et puisque leur produit est $\equiv 1$ d'après (3), b est $\equiv 1$ et la congruence devient

$$x^2 + 2ax + 1 \equiv 0;$$

$a^2 - 1$ est donc un non-résidu, et par suite $1 - a^2$ un résidu. Écrivons donc les racines sous la forme

$$x = -a \pm \sqrt{1 - a^2}\, i.$$

Or, on peut disposer les racines u par couples, tels que

$$\cos\frac{2k\pi}{q+1} + i\sin\frac{2k\pi}{q+1}, \quad \cos\frac{2k\pi}{q+1} - i\sin\frac{2k\pi}{q+1},$$

dont le produit est congru à 1. De ces deux manières de grouper les racines, qui sont évidemment identiques, on conclut que $\cos\frac{2k\pi}{q+1}$ et $\sin\frac{2k\pi}{q+1}$ sont deux nombres entiers réels.

Les racines v appartiennent aussi deux à deux à des congruences irréductibles du second degré, dont les coefficients sont réels; mais accouplons-les autrement et de manière que le produit des deux racines réunies soit congru à l'unité; on aura pour l'un des couples

$$v_1 \equiv \cos\frac{(2l+1)\pi}{q+1} + i\sin\frac{(2l+1)\pi}{q+1},$$

$$v_2 \equiv \cos\frac{(2l+1)\pi}{q+1} - i\sin\frac{(2l+1)\pi}{q+1};$$

ces racines satisfont à la congruence du second degré

$$x^2 + 2ax + 1 \equiv 0 \pmod{q},$$

dans laquelle a n'est pas réel; car s'il l'était, v étant racine, v^q serait la seconde, et puisque leur produit est congru à l'unité, on aurait $v^{q+1} \equiv 1$, ce qui est absurde; donc $\cos \frac{(2l+1)\pi}{q+1}$ est imaginaire, et nous allons prouver que le sinus l'est aussi.

Posons

$$\tang \frac{2r\pi}{q+1} = b,$$

nous aurons

$$\tang \frac{r\pi}{q+1} \equiv \frac{-1 \pm \sqrt{1+b^2}}{b};$$

or, on a

$$1 + b^2 \equiv \frac{1}{\cos^2 \frac{2r\pi}{q+1}};$$

donc puisque $\cos \frac{2r\pi}{q+1}$ est réel, $\tang \frac{r\pi}{q+1}$ l'est aussi. Posons

$$\sqrt{1+b^2} \equiv \varepsilon,$$

et nous aurons

$$\sin \frac{r\pi}{q+1} \equiv \frac{-1+\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon^2+2\varepsilon}}, \quad \cos \frac{r\pi}{q+1} \equiv \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon^2+2\varepsilon}}.$$

Si r est impair, le cosinus est imaginaire d'après ce que nous avons dit ci-dessus; donc aussi le sinus. Comme nous savons que si r est pair le sinus et le cosinus sont réels, $2\varepsilon^2 + 2\varepsilon$ est résidu ou non suivant que r est pair ou impair.

Désignons par N une racine de la congruence (1), nous pourrons poser

$$\mathrm{N} \equiv \cos \frac{k\pi}{q+1} + i \sin \frac{k\pi}{q+1},$$

et nous en tirerons

$$\tang \frac{k\pi}{q+1} \equiv \varphi \frac{1-\mathrm{N}^2}{1+\mathrm{N}^2}$$

ou

$$\tang \frac{k\pi}{q+1} \equiv \varphi \frac{1-\mathrm{M}}{1+\mathrm{M}},$$

M désignant l'une quelconque des racines de (3); il en résulte que les tangentes des arcs o, $\frac{\pi}{q+1}$, $2\frac{\pi}{q+1}$, ..., $q\frac{\pi}{q+1}$ sont toutes incongrues suivant le module q.

Propriétés des nombres goniométriques des arcs $\frac{k\pi}{2(q\pm 1)}$.

17. Nous désignons par nombres goniométriques les expressions des lignes trigonométriques d'un multiple d'une partie aliquote du cercle, prises suivant un module q.

Supposons que q soit un nombre premier de la forme $4n+1$. Désignons par G la plus petite racine primitive de la congruence

$$(a) \qquad z^{q-1} \equiv 1 \pmod{q},$$

et posons $\varphi \equiv G^{\frac{q-1}{4}}$, cette plus petite racine primitive peut être représentée par la formule

$$G \equiv \cos\frac{2\pi}{q-1} + \varphi \sin\frac{2\pi}{q-1},$$

et on obtient les nombres entiers qui appartiennent aux groupes A, B, C, D par rapport à q, en élevant G respectivement aux puissances $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$. D'ailleurs les puissances de G s'obtiennent en multipliant l'argument par l'exposant de la puissance, de sorte que l'on a

$$G^l \equiv \cos\frac{2l\pi}{q-1} + \varphi \sin\frac{2l\pi}{q-1}.$$

Actuellement considérons des expressions de même genre, mais dans lesquelles l'argument, au lieu d'être un multiple de $\frac{2\pi}{q-1}$, soit un multiple du quart de cet argument. La quantité

$$L \equiv \cos\frac{l\pi}{2(q-1)} + \varphi \sin\frac{l\pi}{2(q-1)},$$

est l'une de ces expressions, elle est racine de

$$z^{4(q-1)} \equiv 1,$$

et en l'élevant à la puissance q, on a

$$L^q \equiv \left[\cos\frac{l\pi}{2(q-1)} + \varphi\sin\frac{l\pi}{2(q-1)}\right]^q \equiv \cos\frac{lq\pi}{2(q-1)} + \varphi\sin\frac{lq\pi}{2(q-1)}$$

$$\equiv \cos\left[\frac{l\pi}{2(q-1)} + \frac{l\pi}{2}\right] + \varphi\sin\left[\frac{l\pi}{2(q-1)} + \frac{l\pi}{2}\right].$$

Mais si l'on observe que l'on a $\varphi^q \equiv \varphi$, puisque $\varphi^4 \equiv 1$ et que q est de la forme $4n+1$, on a aussi

$$L^q \equiv \left[\cos\frac{l\pi}{2(q-1)}\right]^q + \varphi\left[\sin\frac{l\pi}{2(q-1)}\right]^q;$$

et en comparant les deux expressions de L^q, et observant que leur égalité subsisterait encore si on y changeait φ en $-\varphi$, on a

$$\cos^q\frac{l\pi}{2(q-1)} \equiv \cos\left[\frac{l\pi}{2(q-1)} + \frac{l\pi}{2}\right],$$

$$\sin^q\frac{l\pi}{2(q-1)} \equiv \sin\left[\frac{l\pi}{2(q-1)} + \frac{l\pi}{2}\right].$$

Supposons ensuite que q soit de la forme $4n+3$; l'une des racines primitives de

$$(b) \qquad z^{q+1} \equiv 1 \pmod{q},$$

peut être représentée par la formule

$$k \equiv \cos\frac{2\pi}{q+1} + i\sin\frac{2\pi}{q+1},$$

et nous obtiendrons quatre groupes de nombres complexes A, B, C, D, en élevant k aux puissances de la forme $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, et nous servant de la formule

$$k^l \equiv \cos\frac{2l\pi}{q+1} + i\sin\frac{2l\pi}{q+1}.$$

Considérons ensuite l'expression semblable

$$N \equiv \cos\frac{l\pi}{2(q+1)} + i\sin\frac{l\pi}{q+1},$$

mais dont l'argument, au lieu d'être un multiple de $\frac{2\pi}{q+1}$, soit un multiple du quart de cet argument ; en l'élevant à la puissance q, on a

$$\begin{aligned} N^q &\equiv \cos\frac{lq\pi}{2(q+1)} + i\sin\frac{lq\pi}{2(q+1)} \\ &\equiv \cos\left[\frac{-l\pi}{2(q+1)} + \frac{l\pi}{2}\right] + i\sin\left[\frac{-l\pi}{2(q+1)} + \frac{l\pi}{2}\right], \end{aligned}$$

et puisqu'on a $i^q \equiv i^{4n+3} \equiv -i$, on a aussi

$$N^q \equiv \cos^q\frac{l\pi}{2(q+1)} - i\sin^q\frac{l\pi}{2(q+1)},$$

et en comparant les deux expressions de N^q, on obtient

$$\begin{aligned} \cos^q\frac{l\pi}{2(q+1)} &\equiv \cos\left[\frac{l\pi}{2(q+1)} - \frac{l\pi}{2}\right], \\ \sin^q\frac{l\pi}{2(q+1)} &\equiv \sin\left[\frac{l\pi}{2(q+1)} - \frac{l\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Mais afin d'arriver à l'uniformité dans les résultats, nous adopterons pour base la racine primitive

$$h \equiv \cos\frac{2\pi}{q+1} - i\sin\frac{2\pi}{q+1} \equiv \cos\frac{-2\pi}{q+1} + i\sin\frac{-2\pi}{q+1},$$

pour laquelle on a

$$h^{\frac{q+1}{4}} \equiv -i.$$

Élevons h à la puissance l, nous aurons

$$h^l \equiv \cos\frac{-2l\pi}{q+1} + i\sin\frac{-2l\pi}{q+1},$$

et pour avoir toutes les racines de la congruence (b), on donnera à l les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q$, et cette racine appartient aux groupes A, B, C ou D suivant que l est de la forme $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ou $4n+3$. Ensuite si on élève à la puissance q les nombres goniométriques de

l'arc $-\frac{2\pi}{2(q+1)}$, on voit que l'argument s'accroît de $\frac{l\pi}{2}$; et on a

$$\cos^q \frac{-l\pi}{2(q+1)} \equiv \cos\left[\frac{-l\pi}{2(q+1)} + \frac{l\pi}{2}\right],$$
$$\sin^q \frac{-l\pi}{2(q+1)} \equiv \sin\left[\frac{-l\pi}{2(q+1)} + \frac{l\pi}{2}\right].$$

On conclut de là : *soit l'arc* $\pm \frac{l\pi}{2(q\mp 1)}$ *où l'on prend les signes supérieurs ou les signes inférieurs, selon que* $q = 4n+1$ *ou* $4n+3$, *si on élève les sinus et cosinus goniométriques de cet arc à la puissance* q, *on ne fait qu'accroître l'argument de* $\frac{l\pi}{2}$.

Introduction de l'angle υ *dans l'expression des quatre périodes de la congruence* $\frac{x^p-1}{x-1} \equiv 0 \pmod{q}$.

18. Nous avons introduit dans l'expression des périodes de l'équation

$$\frac{x^p-1}{x-1} = 0$$

un arc υ incommensurable avec la circonférence, et dont la tangente est rationnelle et déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang} \upsilon = \frac{b}{a}.$$

Dans le cas de $p = 8n+1$, les quatre périodes, avec leur ordre circulaire, sont données par la formule

$$(1) \qquad \omega^{(k)} = -\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos(\upsilon + k\pi)}\left(1 + 2\cos\frac{\upsilon + k\pi}{2}\right),$$

et si p est de la forme $8n+5$, leurs expressions sont

$$(2) \qquad \omega^{(k)} = -\frac{1}{4} + \frac{a}{4\cos(\upsilon + k\pi)}\left(1 + 2\sqrt{-1}\cos\frac{\upsilon + k\pi}{2}\right).$$

54..

Or, d'après les conventions que nous avons faites et l'adoption des nombres goniométriques, on peut employer les mêmes expressions pour les périodes de la congruence

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, q).$$

Considérons d'abord un module q de la forme $4n+1$. Le nombre $\frac{b}{a}$ (mod. q) peut avoir pour valeur un des nombres $0, 1, 2, \ldots, q-1, \infty$, excepté $\pm\varphi$; car si l'on avait

$$\frac{b}{a} \equiv \pm\varphi \quad (\text{mod.}\, q),$$

on en conclurait

$$b^2 + a^2 \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, q),$$

et p ne serait pas premier. Or les expressions algébriques des tangentes des arcs

$$0, \quad \frac{\pi}{q-1}, \quad 2\frac{\pi}{q-1}, \quad 3\frac{\pi}{q-1}, \ldots, \quad (q-2)\frac{\pi}{q-1},$$

prises suivant le module q, représentent tous ces nombres d'après le n° **15**; donc, υ étant un de ces arcs, on peut poser

$$\frac{b}{a} \equiv \tang \upsilon \quad (\text{mod.}\, q), \qquad \upsilon = \frac{l\pi}{q-1},$$

et si l'on fait

$$\text{M} \equiv \cos 2\upsilon + \varphi \sin 2\upsilon,$$

M sera l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, q-1$ d'après le même numéro, et l'on aura

$$(3) \qquad \frac{b}{a} \equiv \varphi \frac{1-\text{M}}{1+\text{M}}.$$

Si nous considérons la période ω, pour laquelle k est nul, nous avons

$$\omega \equiv -\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos\upsilon}\left(1 + 2\cos\frac{\upsilon}{2}\right) \quad \text{si} \quad p = 8n+1,$$

$$\omega \equiv -\frac{1}{4} + \frac{a}{4\cos\upsilon}\left(1 + 2\varphi\cos\frac{\upsilon}{2}\right) \quad \text{si} \quad p = 8n+5,$$

Or, d'après le numéro précédent, on a

$$\left(\cos\frac{v}{2}\right)^q \equiv \cos\left(v + \frac{l\pi}{2}\right), \quad (\cos v)^q \equiv \cos(v + l\pi);$$

donc, dans les deux cas, en remarquant que φ^q est $\equiv \varphi$, on a

$$\omega^q \equiv -\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos(v + l\pi)}\left(1 + 2\cos\frac{v + l\pi}{2}\right),$$

$$\omega^q \equiv -\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos(v + l\pi)}\left(1 + 2\varphi\cos\frac{v + l\pi}{2}\right),$$

et par suite

$$\omega^q \equiv \omega^{(l)}.$$

On en conclut, d'après le n° **12**, que *q appartient à* A, B, C *ou* D *par rapport à p*, selon que l est de la forme $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, ou *selon que le nombre entier* (n° **17**)

$$\mathrm{M} \equiv \cos\frac{2l\pi}{q-1} + \varphi\sin\frac{2l\pi}{q-1},$$

de la formule (3), *appartient à* A, B, C *ou* D *par rapport à q*.

Passons à un module premier de la forme $4n+3$. Les expressions algébriques des tangentes des arcs $0, \frac{\pi}{q+1}, 2\frac{\pi}{q+1}, \ldots, q\frac{\pi}{q+1}$, prises suivant le module q, représentent tous les nombres $0, 1, 2, \ldots, q-1, \infty$; et il en est de même des tangentes des arcs $0, -\frac{\pi}{q+1}, -2\frac{\pi}{q+1}, \ldots, -\frac{q\pi}{q+1}$; donc v étant un certain arc de la forme

$$v = -\frac{l\pi}{q+1},$$

dans lequel l est un nombre entier compris de zéro à q, on peut poser

$$(n) \qquad \frac{b}{a} \equiv \operatorname{tang} v,$$

et si l'on écrit

$$\cos 2v + i\sin 2v \equiv \mathrm{M} \pmod{q},$$

M sera l'une quelconque des racines de

$$z^{q+1} = 1,$$

et en prenant pour base la racine primitive

$$h = \cos\frac{-2\pi}{q+1} + i\sin\frac{-2\pi}{q+1},$$

pour laquelle on a

$$h^{\frac{q+1}{4}} = -i,$$

M appartient (n° **17**) aux groupes A, B, C ou D, suivant que l est de la forme $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ou $4n+3$, et par l'introduction de ce nombre dans la formule (n) on a

$$(4) \qquad \frac{b}{a} = i\,\frac{1-\mathrm{M}}{1+\mathrm{M}}.$$

q étant de la forme $4n+3$, distinguons les cas de $p = 8n+1$ et de $p = 8n+5$.

Si p est de la forme $8n+1$, on aura en élevant ω à la puissance q, d'après le théorème qui termine le n° **17**,

$$\begin{aligned}\omega^q &= -\frac{1}{4} - \frac{a}{4\cos(\upsilon + l\pi)}\left(1 + 2\cos\frac{\upsilon + l\pi}{2}\right)\\ &= \omega^{(l)}.\end{aligned}$$

et on a le même résultat que lorsque q est de la forme $4n+1$; ainsi q appartient à A, B, C ou D par rapport à p, selon que l est de la forme $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ou $4n+3$, ou selon que le nombre M de la formule (4) appartient aux groupes A, B, C ou D. Et dans cet énoncé on peut substituer $-q$ à $+q$, en remarquant que ces deux nombres ont le même caractère biquadratique par rapport à p.

Mais si p est de la forme $8n+5$, en élevant à la puissance $q^{\text{ième}}$ la période

$$\omega = -\frac{1}{4} + \frac{a}{4\cos\upsilon}\left(1 + 2i\cos\frac{\upsilon}{2}\right),$$

et observant que i^q est $\equiv -i$, on obtient

$$\begin{aligned}\omega^q &\equiv -\frac{1}{4}+\frac{a}{4\cos(\upsilon+l\pi)}\left(1-2i\cos\frac{\upsilon+l\pi}{2}\right)\\ &\equiv -\frac{1}{4}+\frac{a}{4\cos[\upsilon+(l+2)\pi]}\left[1+2i\cos\frac{\upsilon+(l+2)\pi}{2}\right]\\ &\equiv \omega^{(l+2)}.\end{aligned}$$

Donc, suivant que l est de la forme $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, ω^q est équivalent à ω'', ω''', ω ou ω', et q appartient, suivant le module p, à C, D, A ou B, et comme -1 appartient à C, $-q$ est respectivement un des nombres A, B, C ou D.

Donc enfin *toutes les fois que q est de la forme $4n+3$, $-q$ appartient à* A, B, C *ou* D *par rapport à p, suivant que le nombre* M *de la formule* (4) *appartient lui-même aux groupes* A, B, C *ou* D *des racines de la congruence* $z^{q+1}\equiv 1$.

Il résulte de là que les formules (3) et (4) détermineront dans tous les cas le caractère biquadratique de $\pm q$ par rapport à p.

Sur les quatre classes α, β, γ, δ de valeurs de $\frac{b}{a}$ (mod. q).

19. G étant la plus petite racine primitive du nombre premier $q=4n+1$, il résulte de ce qui précède que les quatre classes de valeurs du rapport $\frac{b}{a}$ (mod. q) sont données par les formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\alpha\equiv\varphi\frac{1-G^{4e}}{1+G^{4e}},\quad \beta\equiv\varphi\frac{1-G^{4e+1}}{1+G^{4e+1}},\quad \gamma\equiv\varphi\frac{1-G^{4e+2}}{1+G^{4e+2}},\quad \delta\equiv\varphi\frac{1-G^{4e+3}}{1+G^{4e+3}},\\ &\varphi\equiv G^{\frac{q-1}{4}},\end{aligned}\right.$$

où il suffit de donner à e les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{q-5}{4}$.

Si au contraire q est de la forme $4n+3$, alors parmi deux racines primitives conjuguées quelconques $r+si$ et $r-si$ de la congruence

$$z^{q+1}\equiv 1 \pmod{q},$$

choisissons celle h pour laquelle on a

$$h^{\frac{q+1}{4}} \equiv - i,$$

et nous avons pour les nombres des classes α, β, γ, δ

$$(2)\quad \alpha \equiv i\,\frac{1 - h^{4e}}{1 - h^{4e}},\quad \beta \equiv i\,\frac{1 - h^{4e+1}}{1 + h^{4e+1}},\quad \gamma \equiv i\,\frac{1 - h^{4e+2}}{1 + h^{4e+2}},\quad \delta \equiv i\,\frac{1 - h^{4e+3}}{1 - h^{4e+3}},$$

en donnant à e les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{q-3}{4}$.

Si nous avons à distinguer les nombres α, β, γ, δ les uns des autres, nous représenterons les expressions (1) par α_e, β_e, γ_e, δ_e; ainsi l'on a

$$\alpha_k \equiv \varphi\,\frac{1 - G^{4k}}{1 + G^{4k}},\quad \alpha_l \equiv \varphi\,\frac{1 - G^{4l}}{1 + G^{4l}},\quad \alpha_{k+l} \equiv \varphi\,\frac{1 - G^{4(k+l)}}{1 + G^{4(k+l)}},$$

et l'on vérifie sans peine que l'on a

$$\frac{\alpha_k + \alpha_l}{1 - \alpha_k \alpha_l} \equiv \alpha_{k+l},$$

formule qui rappelle la tangente de la somme de deux arcs k et l.

Désignons par la lettre μ des nombres (1) appartenant à la même classe, et posons

$$\mu_e \equiv \varphi\,\frac{1 - G^{4e+j}}{1 + G^{4e+j}},$$

e étant variable et j fixe; nous aurons

$$(3)\qquad \frac{\mu_k + \alpha_l}{1 - \mu_k \alpha_l} \equiv \mu_{k+l}.$$

Considérons l'expression

$$\theta(\mu) \equiv \frac{\mu + \alpha_1}{1 - \alpha_1 \mu},$$

et posons les notations

$$\theta\theta(t) = \theta^2(t),\quad \theta\theta^2(t) = \theta^3(t),\ \ldots,$$

il est aisé de voir qu'on aura en général

$$\theta^n(\mu) \equiv \frac{\mu + \alpha_n}{1 - \alpha_n \mu},$$

et par conséquent, en formant successivement les nombres $\theta(\mu)$, $\theta^2(\mu)$, $\theta^3(\mu)$, etc., on aura une suite de nombres appartenant à la même classe que le premier μ d'où l'on est parti. Comme $\alpha_{\frac{q-1}{4}} \equiv 0$, on a

$$\theta^{\frac{q-1}{4}}(t) \equiv t,$$

et dès la $\left(\frac{q-1}{4}\right)^{\text{ième}}$ opération, on retrouve les mêmes nombres; mais on aura obtenu tous les nombres de la classe à laquelle μ appartient.

On a donc une méthode pour calculer les nombres (1) autre que celle qui résulte directement des valeurs posées.

20. Cette méthode est aussi applicable aux nombres (2), et offre alors beaucoup d'avantage sur le calcul direct, qui serait compliqué d'opérations sur des nombres imaginaires.

En effet, si l'on pose

$$\alpha_l \equiv i\,\frac{1 - h^{4l}}{1 + h^{4l}}, \quad \mu_k \equiv i\,\frac{1 - h^{4k+j}}{1 + h^{4k+j}},$$

j étant égal à 0, 1, 2 ou 3, mais ayant une valeur fixe; on a encore la formule (3), et si l'on pose de plus

$$\alpha_1 \equiv i\,\frac{1 - h^4}{1 + h^4}, \quad \theta(\mu) \equiv \frac{\mu + \alpha_1}{1 - \alpha_1 \mu},$$

on aura encore

$$\theta^n(\mu) \equiv \frac{\mu + \alpha_n}{1 - \alpha_n \mu}$$

On a $\alpha_{\frac{q+1}{4}} \equiv 0$; donc la suite

$$\mu,\ \theta(\mu),\ \theta^2(\mu), \ldots,\ \theta^{\frac{q-3}{4}}(\mu)$$

donne les $\frac{q+1}{4}$ nombres qui appartiennent à la même classe que μ.

Ayant calculé cette série, on peut prendre un des nombres o, 1, 2,..., $q-1$ qui ne s'y trouvent pas et former une seconde suite

$$\nu,\ \theta(\nu),\ \theta^2(\nu),\ldots,\ \theta^{\frac{q-3}{4}}(\nu),$$

qui donnera tous les nombres d'une même classe. On pourra de même obtenir les deux autres séries, et il ne restera plus qu'à les distinguer; or la classe α contient le nombre zéro, et la classe γ, comme la classe α, est composée de nombres égaux et de signe contraire selon le module q; de sorte qu'il n'y a plus à distinguer que la série β de la série δ, et on arrivera à cette dernière séparation en calculant

$$\beta_1 = i\,\frac{1-h}{1+h}.$$

Disons maintenant comment on déterminera α_1 et β_1 qui entrent dans ce calcul.

h, racine primitive de $z^{q+1}\equiv 1 \pmod{q}$, appartient à une congruence irréductible du second degré de la forme

$$h^2 - 2rh + 1 \equiv 0 \pmod{q},$$

la congruence étant irréductible, r^2-1 est un non-résidu quadratique et par conséquent $1-r^2$ un résidu. Posons

$$h = r + si,$$

en choisissant pour s celle des deux valeurs de $\sqrt{1-r^2}$ pour laquelle on a

$$h^{\frac{q+1}{4}} \equiv -i.$$

Alors on aura pour β_1

$$\beta_1 \equiv i\,\frac{1-r-si}{1+r+si} \equiv i\,\frac{(1-r-si)(1+r-si)}{(1+r+si)(1+r-si)} \equiv i\,\frac{(1-si)^2-r^2}{(1+r)^2+s^2}.$$

Si l'on opère les réductions en se rappelant que $s^2\equiv 1-r^2$, on a

$$\beta_1 \equiv \frac{s}{1+r}.$$

On a ensuite, en élevant h à la quatrième puissance,

$$h^4 \equiv 8r^4 - 8r^2 + 1 + 4rs(2r^2 - 1)i;$$

donc

$$\alpha_1 \equiv 2ir\frac{-2r^3 + 2r - s(2r^2 - 1)i}{(2r^2 - 1)(2r^2 - 1 + 2rsi)} \equiv 2r\frac{s(2r^2 - 1) + 2r(1 - r^2)i}{(2r^2 - 1)(2r^2 - 1 + 2rsi)}$$
$$\equiv 2r\frac{s(2r^2 - 1) + 2rs^2 i}{(2r^2 - 1)(2r^2 - 1 + 2rsi)} \equiv \frac{2rs}{2r^2 - 1},$$

et les deux quantités α_1 et β_1 sont obtenues, dégagées de toutes les imaginaires.

Applications. — 1° Soit $q = 5$; la plus petite racine primitive de 5 est $G = 2$; on a donc $\varphi \equiv 2$, puis

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \infty, \quad \delta = 4;$$

donc 5 appartient à A, B, C ou D, selon le module p, suivant que $\frac{b}{a}$ est congru à 0, 1, ∞ ou 4 suivant le module 5.

2° Soit $q = 13$; on a $G = 2$, $\varphi \equiv 8$ et

$$\alpha = 0, \quad 9, \quad 4; \qquad \beta = 6, \quad 11, \quad 12;$$
$$\gamma = 3, \quad \infty, \quad 10; \qquad \delta = 1, \quad 2, \quad 7.$$

On en conclut le caractère de 13.

Les nombres précédents sont de la forme $4n + 1$; considérons des nombres de la forme $4n + 3$.

3° Si q est égal à 3, on a $h \equiv -i$ qui satisfait à la condition

$$h^{\frac{q+1}{4}} \equiv h \equiv -i \pmod{3},$$

et on en conclut $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 2$; on a donc

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = \infty, \quad \delta = 1.$$

Ainsi -3 appartient à A, B, C ou D, selon le module p, suivant que $\frac{b}{a}$ est congru à 0, 2, ∞ ou 1 suivant le module 3.

4° Soit $q = 7$; $h = -2 + 2i$ est racine primitive de la congruence

$$h^8 \equiv 1 \pmod{7},$$

et satisfait de plus à la condition $h^2 \equiv -i$; on a donc $\alpha_1 = \infty$, $\beta_1 = 5$; puis

$$\alpha = 0,\ \infty; \quad \beta = 5,\ 4; \quad \gamma = 1,\ 6; \quad \delta = 3,\ 2.$$

5° Soit $q = 11$; $h = -3 + 5i$ est racine primitive de

$$h^{12} \equiv 1 \pmod{11},$$

et l'on a $h^{\frac{q+1}{4}} = h^3 \equiv -i$; donc $\alpha_1 = 6$, $\beta_1 = 3$, et l'on obtient

$$\alpha = 0,\ 6,\ 5; \qquad \beta = 3,\ 4,\ 1;$$
$$\gamma = \infty,\ 2,\ 9; \qquad \delta = 8,\ 7,\ 10.$$

Le caractère biquadratique des nombres premiers suivants est indiqué par les tableaux ci-dessous :

$$q = 17.$$

$$\alpha = 0,\ 1,\ 16,\ \infty; \qquad \beta = 2,\ 6,\ 8,\ 14;$$
$$\gamma = 5,\ 7,\ 10,\ 12; \qquad \delta = 3,\ 9,\ 11,\ 15.$$

$$-q = -19.$$

$$\alpha = 0,\ 2,\ 5,\ 14,\ 17; \qquad \beta = 3,\ 7,\ 11,\ 13,\ 18;$$
$$\gamma = 4,\ 9,\ 10,\ 15,\ \infty; \qquad \delta = 1,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16.$$

$$-q = -23.$$

$$\alpha = 0,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \infty; \qquad \beta = 2,\ 3,\ 4,\ 11,\ 15,\ 17;$$
$$\gamma = 1,\ 5,\ 9,\ 14,\ 18,\ 22; \qquad \delta = 6,\ 8,\ 12,\ 19,\ 20,\ 21.$$

$$q = 29.$$

$\alpha = 0,\ 9,\ 11,\ 14,\ 15,\ 18,\ 20;$
$\beta = 7,\ 19,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 28;$
$\gamma = 2,\ 8,\ 13,\ 16,\ 21,\ 27,\ \infty;$
$\delta = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 22.$

$$-q = -31.$$

$\alpha = 0,\ 1,\ 7,\ 9,\ 22,\ 24,\ 30,\ \infty;$
$\beta = 5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 12,\ 14,\ 18,\ 27;$
$\gamma = 2,\ 3,\ 10,\ 15,\ 16,\ 21,\ 28,\ 29;$
$\delta = 4,\ 13,\ 17,\ 19,\ 20,\ 23,\ 25,\ 26.$

$$q = 37.$$

$\alpha = 0,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 22,\ 23,\ 25,\ 27;$
$\beta = 1,\ 2,\ 7,\ 9,\ 13,\ 16,\ 19,\ 20,\ 33;$
$\gamma = 3,\ 5,\ 8,\ 11,\ 26,\ 29,\ 32,\ 34,\ \infty;$
$\delta = 4,\ 17,\ 18,\ 21,\ 24,\ 28,\ 30,\ 35,\ 36.$

$$q = 41.$$

$\alpha = 0,\ 2,\ 11,\ 15,\ 20,\ 21,\ 26,\ 30,\ 39,\ \infty;$
$\beta = 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 13,\ 16,\ 22,\ 23,\ 24,\ 29;$
$\gamma = 1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14,\ 27,\ 34,\ 35,\ 38,\ 40;$
$\delta = 12,\ 17,\ 18,\ 19,\ 25,\ 28,\ 31,\ 33,\ 36,\ 37.$

$$-q = -43.$$

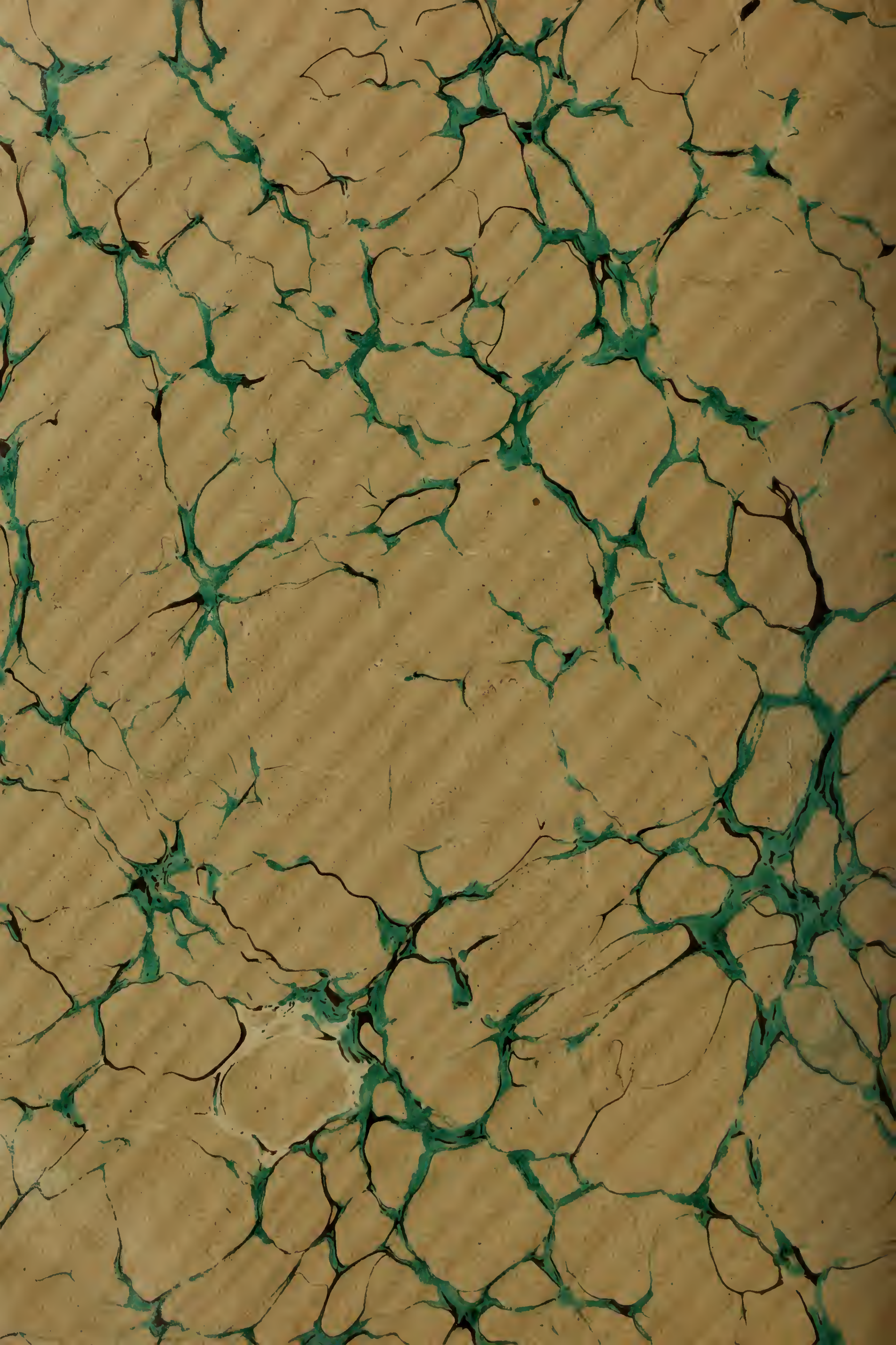
$\alpha = 0,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33;$
$\beta = 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 16,\ 19,\ 22,\ 26,\ 34,\ 35,\ 37;$
$\gamma = 3,\ 4,\ 13,\ 18,\ 20,\ 23,\ 25,\ 30,\ 39,\ 40,\ \infty;$
$\delta = 6,\ 8,\ 9,\ 17,\ 21,\ 24,\ 27,\ 36,\ 38,\ 41,\ 42.$

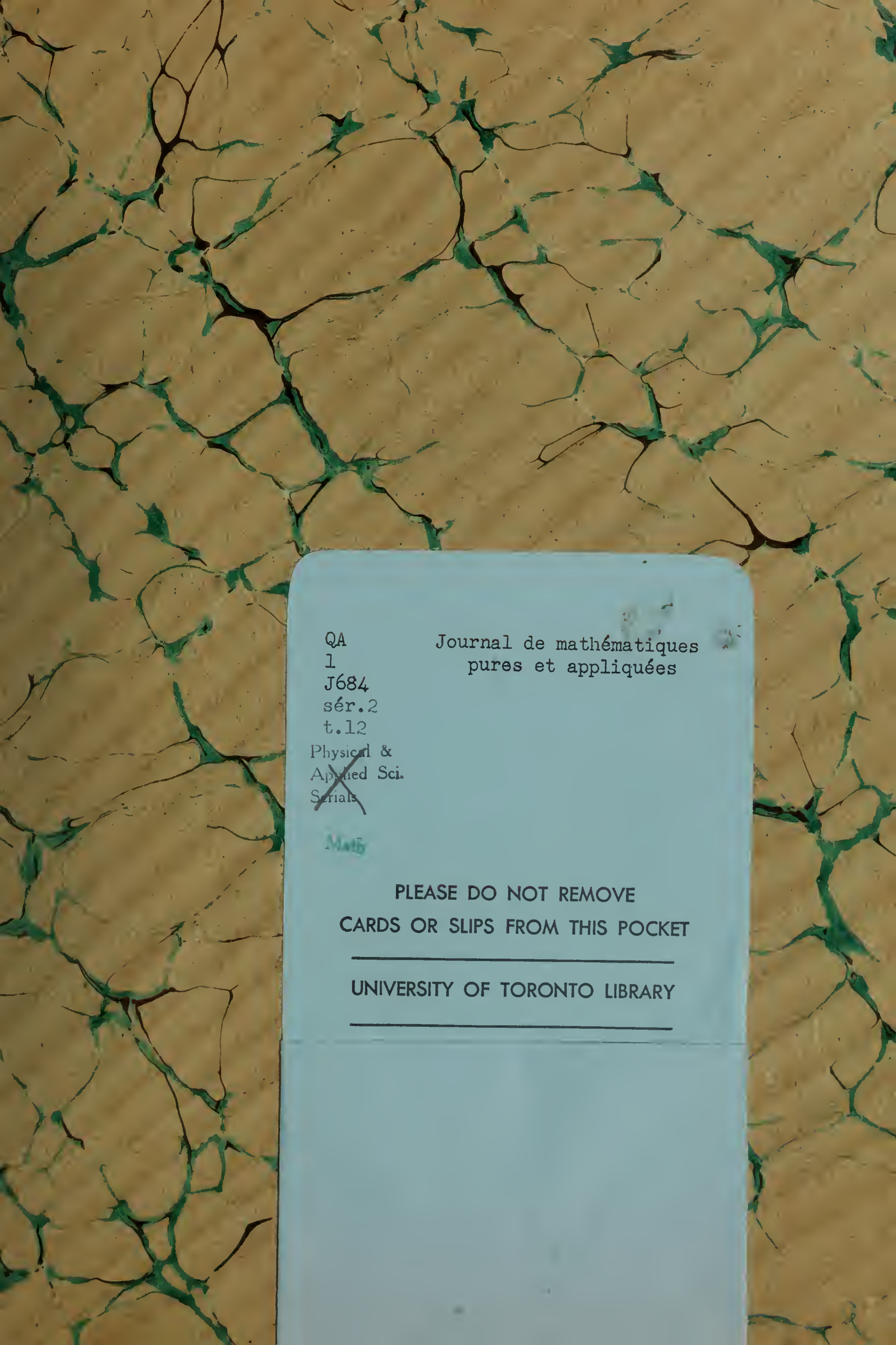
$$-q = -47.$$

$$\alpha = 0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 12,\ 14,\ 33,\ 35,\ 37,\ 43,\ 46,\ \infty;$$
$$\beta = 3,\ 13,\ 15,\ 18,\ 19,\ 21,\ 24,\ 25,\ 31,\ 38,\ 42,\ 45;$$
$$\gamma = 6,\ 7,\ 8,\ 11,\ 17,\ 20,\ 27,\ 30,\ 36,\ 39,\ 40,\ 41;$$
$$\delta = 2,\ 5,\ 9,\ 16,\ 22,\ 23,\ 26,\ 28,\ 29,\ 32,\ 34,\ 44.$$

FIN DU TOME DOUZIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.





QA
1
J684
sér.2
t.12
Journal de mathématiques
pures et appliquées
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

